Oberstufe: Ergebnisse und ausführliche Lösungen zu Arbeit, Leistung und dem Wirkungsgrad IV

Ergebnisse

E1	Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein Ball senkrecht nach oben geworfen werden, damit er eine Höhe von 12 m erreicht? In welcher Höhe beträgt seine Geschwindigkeit nur noch die Hälfte?	
	Ergebnis	
	Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt etwa 15,344 m/s. In 9 m Höhe beträgt seine Geschwindigkeit nur noch die Hälfte.	

E2	Für den Fall eines Versagen der Bremsen gibt es an Gefällestrecken häufig Bremsstrecken, die von der Fahrbahn abweichen und steil ansteigen, so dass ein Lastwagen mit defekten Bremsen dort ausrollen kann. Wie weit fährt ein LKW die Bremsstrecke, die unter einem Winkel von 12^0 gegen die Waagerechte ansteigt, hinauf, wenn er mit 108 km/h auf sie abbiegt? Von der anfänglichen Bewegungsenergie werden 26% durch Reibung und Luftwiderstand umgesetzt.
	Ergebnis
	Der LKW fährt die Bremsstrecke etwa 163,266 m hinauf.

E3	Welche Höhe müsste ein Wanderer (m = 75 kg) überwinden, um den „Brennwert“.	
	a)	einer Fruchtschnitte von 715 kJ (40 g).
	b)	einer mittelgroßen Banane 478 kJ (120 g) in Höhenenergie umzusetzen?
	Ergebnis	
	a)	Der Wanderer müsste eine Höhe von 911,06 m überwinden.
	b)	Der Wanderer müsste eine Höhe von 609,072 m überwinden.

E4	Ein Trampolinspringer m = 60 kg springt aus einer Höhe von h = 3 m auf das Sprungtuch. Er hält in jeder Hand eine Hantel, die er in dem Augenblick, in dem er den tiefsten Punkt erreicht hat, zur Seite schleudert. Welche Masse müssen die Hanteln besitzen, damit der Springer ohne weiteres dazutun eine Höhe von 3,6 m erreicht? Reibung und Luftwiderstand sind zu vernachlässigen.
	Ergebnis
	Die Masse jeder Hantel muss 6 kg betragen, also insgesamt 12 kg Zusatzmasse.

E5	Wird ein LKW abgebremst, so verwandelt sich die Bewegungsenergie an den Bremsscheiben in Wärme. Ein LKW der Masse m = 20 t wird von 90 km/h bis zum Stillstand abgebremst. Welche Erwärmung erfahren die Bremsscheiben? Für die Erwärmung der Bremsen gilt die Formel: $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ mit $c = 0{,}47 \frac{kJ}{kg \cdot K}$ und $m = 40\,kg$ mit Q als Bremsenergie in kJ
	Ergebnis
	Die Bremsen erwärmen sich um etwa 332,447 Grad.

E6	Ein Schwerlastaufzug (m = 6000 kg) wird gleichmäßig nach oben beschleunigt und erreicht nach 20 s v = 10 m/s. Welche Arbeit ist dazu nötig? Welche Leistung muss der Antriebsmotor vollbringen?
	Ergebnis
	Beschleunigungsarbeit: W = 6 186 kJ. Antriebsleistung P = 309,3 kW.

E7	Zu Beginn einer 200 m langen Strecke mit 5% Gefälle hört ein Radfahrer, der mit 18 km/h fährt auf zu treten. Welche Geschwindigkeit hat er am Ende dieser Strecke, wenn ca. 30% der gesamten Bewegungsenergie durch Reibung und Luftwiderstand als mechanische Energie verloren gehen?
	Ergebnis
	Am Ende der Strecke beträgt die Geschwindigkeit etwa 12,437 m/s oder 44,772km/h.

E8	Auf einen Lastwagen der Ladehöhe h = 1,20 m sollen Fässer der Masse m = 40 kg verladen werden. Man kann die Fässer lotrecht anheben oder über eine 3 m lange Laderampe hinaufrollen. Berechnen Sie für beide Fälle die Arbeit und vergleichen Sie. Reibungsverluste sind zu vernachlässigen.
	Ergebnis
	Die zu verrichtende Arbeit beträgt 470,88 Nm. Sie ist in beiden Fällen gleich.

Ausführliche Lösung

A1	**Aufgabe**
	Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein Ball senkrecht nach oben geworfen werden, damit er eine Höhe von 12 m erreicht? In welcher Höhe beträgt seine Geschwindigkeit nur noch die Hälfte?

A1 Ausführliche Lösung

Vorüberlegung: Die Anfangsgeschwindigkeit des Balles muss so groß sein, damit er gerade 12 m Höhe erreicht. Beim Abwurf hat der Ball nur Bewegungsenergie, die sich mit zunehmender Höhe in Höhenenergie umwandelt. Am höchsten Punkt hat der Ball nur noch Höhenenergie.

gegeben: $h = 12\,m \qquad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ gesucht: v_0

Energie des Balls beim Abwurf: $W_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{2}$

Energie des Balls am höchsten Punkt: $W_h = m \cdot g \cdot h$

Es gilt: $W_0 = W_h \Leftrightarrow \frac{m \cdot v_0^2}{2} = m \cdot g \cdot h \,|:m$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0^2}{2} = g \cdot h \,|\cdot 2 \Leftrightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \cdot h \,|\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 12\,m}$$

$$= \sqrt{235{,}44\frac{m^2}{s^2}} \approx \underline{\underline{15{,}344\frac{m}{s}}}$$

Energiebilanz für die Höhe h_x bei der Geschwindigkeit $\frac{v_0}{2}$

$$m \cdot g \cdot h_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = m \cdot g \cdot h \,|:m$$

$$\Leftrightarrow g \cdot h_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = g \cdot h \,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot g \cdot h_x = \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = 2 \cdot g \cdot h \,| - \left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

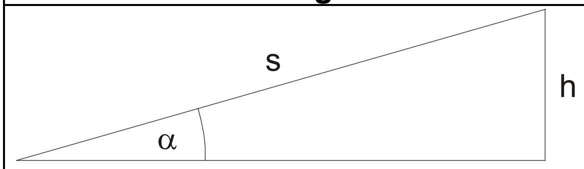
$$\Leftrightarrow 2 \cdot g \cdot h_x = 2 \cdot g \cdot h - \frac{v_0^2}{4} \,|:2 \cdot g$$

$$\Leftrightarrow h_x = h - \frac{1}{4}\underbrace{\frac{v_0^2}{2 \cdot g}}_{h} = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h \Leftrightarrow h_x = \frac{3}{4} \cdot 12\,m = \underline{\underline{9\,m}}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit des Balls beträgt etwa 15,344 m/s.
In 9 m Höhe beträgt seine Geschwindigkeit nur noch die Hälfte.

A2	**Aufgabe**
	Für den Fall eines Versagen der Bremsen gibt es an Gefällestrecken häufig Bremsstrecken, die von der Fahrbahn abweichen und steil ansteigen, so dass ein Lastwagen mit defekten Bremsen dort ausrollen kann. Wie weit fährt ein LKW die Bremsstrecke, die unter einem Winkel von 12^0 gegen die Waagerechte ansteigt, hinauf, wenn er mit 108 km/h auf sie abbiegt? Von der anfänglichen Bewegungsenergie werden 26% durch Reibung und Luftwiderstand umgesetzt.

A2 Ausführliche Lösung



$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \Leftrightarrow s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

gegeben: $v = 108\frac{km}{h} = 30\ \frac{m}{s} \quad \alpha = 12^0$

Reibungsverlust : 26% $\quad \left(1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h} \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}\right)$

gesucht: Auslaufstrecke s

Bewegungsenergie: $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

Energie beim Stillstand: $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Es gilt: $0{,}74 \cdot E_{kin} = E_{pot} \Leftrightarrow 0{,}74 \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h$

$$\Leftrightarrow h = 0{,}74 \cdot \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot m \cdot g} = 0{,}37 \cdot \frac{v^2}{g}$$

mit $s = \frac{h}{\sin(\alpha)}$ gilt:

$$s = 0{,}37 \cdot \frac{v^2}{g \cdot \sin(\alpha)} = \frac{0{,}37 \cdot 900\frac{m^2}{s^2}}{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \sin(12^0)}$$

$$= \frac{0{,}37 \cdot 900}{9{,}81 \cdot \sin(12^0)} \frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m}{s^2}} = \frac{0{,}37 \cdot 900}{9{,}81 \cdot \sin(12^0)} \cdot \frac{m^2 \cdot s^2}{s^2 \cdot m} = \frac{0{,}37 \cdot 900}{9{,}81 \cdot \sin(12^0)} m \approx \underline{\underline{163{,}226\,m}}$$

Der LKW fährt die Bremsstrecke etwa 163,266 m hinauf.

A3	**Aufgabe**	
	Welche Höhe müsste ein Wanderer (m = 80 kg) überwinden, um den „Brennwert“.	
	a)	einer Fruchtschnitte von 715 kJ (40 g).
	b)	einer mittelgroßen Banane 478 kJ (120 g) in Höhenenergie umzusetzen?

A3 Ausführliche Lösung

a)

Umrechnungen und Konstante:

$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2} \quad 1\frac{kg\cdot m}{s^2} = 1N \quad 1\frac{kg\cdot m^2}{s^2} = 1\,Nm = 1Ws = 1J$$

gegeben: Masse $m = 80\,kg$

Brennwert einer Fruchtschnitte: $E = 715\,kJ = 715\,000\,Ws = 715\,000\frac{kg\cdot m^2}{s^2}$

$$W = m\cdot g\cdot h \Leftrightarrow h = \frac{W}{m\cdot g} = \frac{E}{m\cdot g}$$

$$= \frac{715\,000\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}{80\,kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = \frac{715\,000}{80\cdot 9{,}81}\cdot\frac{\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}{\frac{kg\cdot m}{s^2}} \approx \underline{\underline{911{,}06\,m}}$$

Der Wanderer müsste eine Höhe von etwa 911,06 m überwinden um den Brennwert einer Fruchtschnitte umzusetzen.

b)

Die Rechnung erfolgt wie bei a), nur mit anderen Werten.
Brennwert einer mittelgroßen Banane:

$$E = 478\,kJ = 478\,000\,Ws = 478\,000\frac{kg\cdot m^2}{s^2}$$

$$h = \frac{E}{m\cdot g} = \frac{478\,000\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}{80\,kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = \frac{478\,000}{80\cdot 9{,}81}\cdot\frac{\frac{kg\cdot m^2}{s^2}}{\frac{kg\cdot m}{s^2}} \approx \underline{\underline{609{,}072\,m}}$$

Der Wanderer müsste eine Höhe von etwa 609,072 m überwinden um den Brennwert einer mittelgroßen Banane umzusetzen.
Bemerkung: Die berechneten Werte sind eher theoretischer Natur, denn sie beinhalten nur die Energie um den Höhenunterschied zu überwinden. Energieverlust des menschlichen Körpers wurde nicht berücksichtigt.

A4	**Aufgabe**
	Ein Trampolinspringer m = 60 kg springt aus einer Höhe von h = 3 m auf das Sprungtuch. Er hält in jeder Hand eine Hantel, die er in dem Augenblick, in dem er den tiefsten Punkt erreicht hat, zur Seite schleudert. Welche Masse müssen die Hanteln besitzen, damit der Springer ohne weiteres dazutun eine Höhe von 3,6 m erreicht? Reibung und Luftwiderstand sind zu vernachlässigen.

A4	**Ausführliche Lösung**
	gegeben: $m = 60\,kg \quad h_1 = 3\,m \quad h_2 = 3{,}6\,m \quad$ gesucht: m_x $(m + m_x) \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h_2 \;|: g$ $\Leftrightarrow (m + m_x) \cdot h_1 = m \cdot h_2 \;|: h_1$ $\Leftrightarrow m + m_x = m \cdot \frac{h_2}{h_1} \;| -m$ $\Leftrightarrow m_x = m \cdot \frac{h_2}{h_1} - m = m\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right)$ $\Leftrightarrow m_x = 60\,kg \cdot \left(\frac{3{,}6\,m}{3\,m} - 1\right) = 60\,kg \cdot (1{,}2 - 1) = 60\,kg \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{12\,kg}}$ Die Masse jeder Hantel muss 6 kg betragen, also insgesamt 12 kg Zusatzmasse.

A5	**Aufgabe**
	Wird ein LKW abgebremst, so verwandelt sich die Bewegungsenergie an den Bremsscheiben in Wärme. Ein LKW der Masse m = 20 t wird von 90 km/h bis zum Stillstand abgebremst. Welche Erwärmung erfahren die Bremsscheiben? Für die Erwärmung der Bremsen gilt die Formel: $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ mit $c = 0{,}47\frac{kJ}{kg \cdot K}$ und $m = 40\,kg$ mit Q als Bremsenergie in kJ

A5	**Ausführliche Lösung**
	gegeben: $m_{LKW} = 20\,t = 20000\,kg \quad m_{Bremsen} = 40\,kg \quad v = 90\frac{km}{h} = 25\frac{m}{s}$ $Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad c_{Stahl} = 0{,}47\frac{kJ}{kg \cdot K} = 470\frac{J}{kg \cdot K} \quad 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,J$ gesucht: ΔT Es gilt: $E_{kin} = Q \Leftrightarrow \frac{m_{LKW}}{2} \cdot v^2 = c \cdot m \cdot \Delta T$ $\Leftrightarrow \Delta T = \frac{m_{LKW}}{2 \cdot c \cdot m_{Bremsen}} \cdot v^2 = \frac{20000\,kg \cdot 625\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 470\frac{J}{kg \cdot K} \cdot 40\,kg} = \frac{20000 \cdot 625}{2 \cdot 470 \cdot 40} \frac{\frac{kg \cdot m^2}{s^2}}{\frac{J}{K}}$ $\approx 332{,}447\frac{J}{\frac{J}{K}} = \underline{\underline{332{,}447\,K}}$ Die Bremsen erwärmen sich um etwa 332,447 Grad.

A6	**Aufgabe**
	Ein Schwerlastaufzug (m = 6000 kg) wird gleichmäßig nach oben beschleunigt und erreicht nach 20 s v = 10 m/s. Welche Arbeit ist dazu nötig? Welche Leistung muss der Antriebsmotor vollbringen?

A6	**Ausführliche Lösung**
	Bei der Berechnung ist zu berücksichtigen, dass ein Teil der Energie als Bewegungsenergie, der andere Teil als Höhenenergie auftritt. $\text{gegeben}: m = 6000\,kg \quad t = 20\,s \quad v = 10\frac{m}{s} \quad \left(1\frac{kg\cdot m^2}{s^2} = 1J \quad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}\right)$ $\text{gesucht}: W_B \text{ und } P$ $\text{Beschleunigung}: v = a\cdot t \Leftrightarrow a = \frac{v}{t} = \frac{10\frac{m}{s}}{20\,s} = 0{,}5\frac{m}{s^2}$ $\text{Hubhöhe}: h = \frac{a}{2}\cdot t^2 = 0{,}25\frac{m}{s^2}\cdot 400\,s^2 = 100\,m$ $\text{Beschleunigungsarbeit}: W_B = \frac{m}{2}\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h$ $W_B = 3000\,kg\cdot 100\frac{m^2}{s^2} + 6000\,kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 100\,m$ $= 300\,000\,J + 5\,886\,000\,J = 6\,186\,000\,J = \underline{\underline{6186\,kJ}}$ $\text{Antriebsleistung}: P = \frac{W_B}{t} = \frac{6\,186\,000\,Ws}{20\,s} = 309\,300\,W = \underline{\underline{309{,}3\,kW}}$ Die Beschleunigungsarbeit beträgt 6 186 kJ. Die erforderliche Antriebsleistung beträgt 309,3 kW. Bemerkung: Der größte Teil der Energie (5 886 kJ) wird zur Überwindung des Höhenunterschieds benötigt. Für die Geschwindigkeitszunahme allein braucht man nur 300 kJ

A7	**Aufgabe**
	Zu Beginn einer 200 m langen Strecke mit 5% Gefälle hört ein Radfahrer, der mit 18 km/h fährt auf zu treten. Welche Geschwindigkeit hat er am Ende dieser Strecke, wenn ca. 30% der gesamten Bewegungsenergie durch Reibung und Luftwiderstand als mechanische Energie verloren gehen?

A7 **Ausführliche Lösung**

$$\text{gegeben}: v_1 = 18\frac{km}{h} = 5\frac{m}{s} \qquad s = 200\,m \qquad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

5% Gefälle 30% der Gesamtenergie als Verlust

gesucht: v_2

5% Gefälle bedeutert: $\tan(\alpha) = 0{,}05 \Leftrightarrow \alpha = \arctan(0{,}05) \approx 2{,}862^0$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \Leftrightarrow h = s \cdot \sin(\alpha)$$

$$0{,}7\left(\frac{m}{2}\cdot v_1^2 + m\cdot g\cdot h\right) = \frac{m}{2}\cdot v_2^2 \mid \cdot\frac{2}{m}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}7\left(v_1^2 + 2\cdot g\cdot h\right) = v_2^2 \mid \sqrt{\;}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \sqrt{0{,}7\left(v_1^2 + 2\cdot g\cdot h\right)} = \sqrt{0{,}7\left(v_1^2 + 2\cdot g\cdot s\cdot \sin(\alpha)\right)}$$

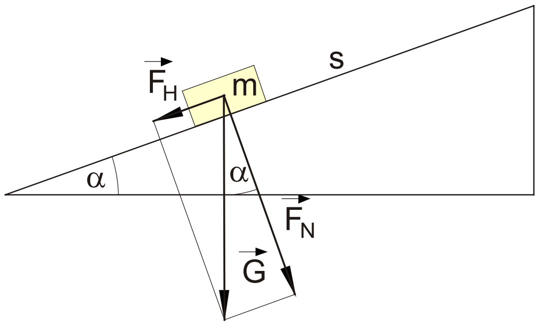
$$= \sqrt{0{,}7\left(25\frac{m^2}{s^2} + 2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 200\,m\cdot \sin(\alpha)\right)} \approx \sqrt{154{,}669\frac{m^2}{s^2}} \approx \underline{\underline{12{,}437\frac{m}{s}}}$$

Am Ende der Strecke beträgt die Geschwindigkeit etwa 12,437 m/s oder 44,772km/h.

A8	**Aufgabe**
	Auf einen Lastwagen der Ladehöhe h = 1,20 m sollen Fässer der Masse m = 40 kg verladen werden. Man kann die Fässer lotrecht anheben oder über eine 3 m lange Laderampe hinaufrollen. Berechnen Sie für beide Fälle die Arbeit und vergleichen Sie. Reibungsverluste sind zu vernachlässigen.

A8 **Ausführliche Lösung**

Verhältnisse an der schiefen Ebene:



$$F_H = G \cdot \sin(\alpha)$$
$$F_N = G \cdot \cos(\alpha)$$
$$G = m \cdot g$$
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$$

$$\text{gegeben}: s = 3\,m \qquad h = 1{,}2\,m \qquad m = 40\,kg \qquad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

$$\text{gesucht}: W \qquad \left(1\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1Nm\right)$$

Fässer werden angehoben:

$$W = m \cdot g \cdot h = 40\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}2\,m = 40 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = \underline{\underline{470{,}88Nm}}$$

Schiefe Ebene:

$$F_H = G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \text{ mit } \sin(\alpha) = \frac{h}{s} \text{ wird}$$

$$F_H = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \Rightarrow W = F_H \cdot s = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \cdot s = m \cdot g \cdot h = \underline{\underline{470{,}88Nm}}$$

Die zu verrichtende Arbeit beträgt 470,88 Nm. Sie ist in beiden Fällen gleich.