Schriftliche Übung Mathematik Stochastik II (Nachschreiber I) Jan. 2010
SG17/27D NAME:

Lösungen

1.	Zum Auffädeln einer Kette stehen rote, blaue und grüne Perlen zur Verfügung. Es werden 6 Perlen aufgefädelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn die Farben zufällig gewählt werden?	
	A:	Es kommt keine rote Perle vor.
	B:	Die ersten 3 Perlen sind grün.
	C:	Es kommen immer abwechselnd nur rote und grüne Perlen vor.

E1: **(Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)**
Die Farbauswahl ist zufällig, das bedeutet, jede Farbe ist gleichwahrscheinlich.
Für jede Perle stehen 3 Farben zur Verfügung.
Damit ist die Anzahl aller Möglichkeiten $3^6 = 729$

A: Es kommt keine rote Perle vor.
Die Anzahl der Möglichkeiten nur zwei Farben zu ziehen ist $2^6 = 64$
Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $2^6 = 64$

Damit ist $P(A) = \frac{64}{729} \approx 0{,}0878$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das keine Perle rot ist.

B: Die ersten drei Perlen sind grün.
Damit können die letzten 3 beliebig gewählt werden. Also <u>eine</u> Möglichkeit für ggg und 3^3 Möglichkeiten für die anderen drei.
Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1 \cdot 3^3 = 27$

Damit ist $P(B) = \frac{27}{729} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das die ersten drei Perlen grün sind.

C: Die Perlen sind abwechselnd rot und grün.
Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: rgrgrg oder grgrgr
Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: 2

Damit ist $P(C) = \frac{2}{729} \approx 0{,}00274$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das die Perlen abwechselnd rot und grün sind.

2.	Für eine Prüfung werden 10 mögliche Themen vereinbart. Drei davon werden in der Prüfung abgefragt. Ein Prüfling lernt nur 6 der 10 Themen.
	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) keines, b) eins, c) zwei, d) alle drei Prüfungsthemen von ihm vorbereitet wurde(n).

E2: (Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff)

10 mögliche Themen, 3 werden abgefragt, Prüfling lernt für 6.

Anzahl der Möglichkeiten aus 10 Themen 3 auszuwählen ist:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

a) Der Prüfling hat sich auf keins der drei ausgewählten Themen vorbereitet.

Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, werden 3 ausgewählt.

Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $\binom{4}{3} = 4$

Damit ist $P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das der Prüfling sich auf kein Thema vorbereitet hat.

b) Der Prüfling hat sich auf eins der drei ausgewählten Themen vorbereitet.

Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, werden 2 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat wird 1 Thema ausgewählt.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6}{1} = 36$

Damit ist $P(B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das der Prüfling sich auf ein Thema vorbereitet hat.

c) Der Prüfling hat sich auf zwei der drei ausgewählten Themen vorbereitet.

Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, wird 1 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat werden 2 Thema ausgewählt.

Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: $\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 60$

Damit ist $P(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das der Prüfling sich auf zwei Thema vorbereitet hat.

d) Der Prüfling hat sich auf alle drei der drei ausgewählten Themen vorbereitet.

Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, wird 0 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat werden 3 Thema ausgewählt.

Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

Damit ist $P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1\overline{6}$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das der Prüfling sich auf alle 3 Thema vorbereitet hat.

3.	Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es 10 Fragen mit je drei möglichen Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Jemand kreuzt nach dem Zufallsprinzip bei jeder Frage eine Antwort an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?	
	A:	Alle Antworten sind falsch.
	B:	Die ersten 5 sind richtig, die letzten 5 sind falsch angekreuzt.
	C:	Genau die Hälfte der Antworten sind richtig.
	D	4 Antworten sind richtig, 6 sind falsch.

E3: 10 Fragen mit je 3 möglichen Antworten.
Die Anzahl der Möglichkeiten bei 10 Fragen jeweils eine von drei möglichen Antworten anzukreuzen ist 3^{10}.
(Urne mit 3 verschiedenen Kugeln, 10 mal Ziehen mit Zurücklegen)

A: Alle Antworten sind falsch.
Bei jeder der 10 Fragen gibt es 2 Möglichkeiten falsch anzukreuzen.
Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 2^{10}

Damit ist $P(A) = \frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0173$

die Wahrscheinlichkeit dafür, alle Antworten falsch anzukreuzen.

B: Die ersten 5 Fragen sind richtig, die letzten 5 Fragen sind falsch angekreuzt.
Für die ersten 5 Fragen gibt es jeweils eine, für die zweiten 5 Fragen jeweils 2 Möglichkeiten anzukreuzen.
Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1^5 \cdot 2^5$

Damit ist $P(B) = \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} \approx 0{,}000.542$

die Wahrscheinlichkeit dafür, die ersten 5 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

C: Genau die Hälfte der Fragen sind richtig angekreuzt.
Um die 5 richtig beantworteten Fragen auf 10 Fragen zu verteilen,

gibt es $\binom{10}{5}$ Möglichkeiten. Jede einzelne hat die Wahrscheinlichkeit von B

Damit ist $P(C) = \binom{10}{5} \cdot \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} = 252 \cdot \frac{2^5}{3^{10}} \approx 0{,}137$

die Wahrscheinlichkeit dafür, genau die Hälfte der Fragen richtig zu beantworten.

D 4 Antworten sind richtig, 6 sind falsch.

Die Anzahl der Möglichkeiten 43 Fragen auf 10 zu verteilen ist $\binom{10}{4} = 210$

Bei jeder der 6 falsch angekreuzten Fragen gibt es 2 Möglichkeiten.

Das sind 2^6 Möglichkeiten.

Die Anzahl der Möglichkeiten fpr D ist: $\binom{10}{4} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6$

Damit ist $P(D) = \frac{210 \cdot 2^6}{3^{10}} \approx 0{,}228$

die Wahrscheinlichkeit dafür, 4 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

4.	Eine Münze wird 5 mal geworfen und p sei 0,5.		
	a)	Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X: Anzahl der Wappen.	
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man	
		(1)	höchstens 3 mal Wappen.
		(2)	weniger als 3 mal Wappen.
		(3)	mindestens 1 mal Wappen
		(4)	mehr als einmal Wappen?

E4: Das Problem kann als 5– stufiger Bernoulli– Versuch betrachtet werden, mit n = 5 und p = 0,5.

a) Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X=k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}=1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=10\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32}$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot1=1\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

b) Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\le3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X<3)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}=\frac{16}{32}=\underline{\underline{0{,}5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X\ge1)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=\underline{\underline{0{,}96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X>1)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{26}{32}=\underline{\underline{0{,}8125}}$$