

**Schriftliche Übung Mathematik**  
**SG16D**
**Do 12.02.09**
**NAME:**

**Hilfsmittel: Taschenrechner, Tabelle der Normalverteilung**  
**Beantworten Sie Fragen stichpunktartig (kurz und knapp).**

| Radius der Umgebung | Wahrscheinlichkeit der Umgebung | Wahrscheinlichkeit der Umgebung | Radius der Umgebung |
|---------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------|
| $1 \cdot \sigma$    | 0,68                            | 0,90                            | $1,64 \cdot \sigma$ |
| $2 \cdot \sigma$    | 0,955                           | 0,95                            | $1,96 \cdot \sigma$ |
| $3 \cdot \sigma$    | 0,997                           | 0,99                            | $2,58 \cdot \sigma$ |

1. Für ein Bernoulli- Versuch gilt:  
 $n = 1000$  und  $p = 0,28$  bestimmen Sie  $P(270 \leq X \leq 290)$

**A1 Ausführliche Lösung**

$$n = 1000 \quad p = 0,28 \quad P(270 \leq X \leq 290)$$

$$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,28 = 280$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{280 \cdot 0,72} = \sqrt{201,6} \approx 14,199 > 3$$

[...{270...280...290}...]

$$P(270 \leq X \leq 290) = P(269,5 \leq X \leq 290,5)$$

$$r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{14,199} \Rightarrow r \approx 0,74 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,74$$

$$P(270 \leq X \leq 290) \approx \underline{\underline{0,541}}$$

2. Ein Würfel wird 600 mal geworfen. (Ereignis: Zahl 6 zählt als Erfolg,  $p = 1/6$ ).  
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall  $\{90 \dots 110\}$ ?

**A2 Ausführliche Lösung**

$$n = 600 \quad p = 1/6 \quad P(90 \leq X \leq 110)$$

$$\mu = n \cdot p = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{83,3} \approx 9,129 > 3$$

[...{90...100...110}...]

$$P(90 \leq X \leq 110) = P(89,5 \leq X \leq 110,5)$$

$$r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{10,5}{9,129} \Rightarrow r \approx 1,15 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 1,15$$

$$P(90 \leq X \leq 110) \approx \underline{\underline{0,750}}$$

Die Wahrscheinlichkeit bei 600 Würfeln mindestens 90- mal und höchstens 110- mal die 6 zu werfen ist 0,750.

|    |  |
|----|--|
| 3. | In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten“, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass bei etwa 10% aller Verkehrsteilnehmer, die an der entsprechenden Stelle kontrolliert werden die „Promillegrenze“ überschritten wird. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Am letzten Wochenende wurden 120 Verkehrsteilnehmer überprüft. |
| a) | Mit wie vielen Fahrverboten kann die Polizei bei der Überprüfung von 120 Verkehrsteilnehmern rechnen?  |
| b) | Überprüfen Sie, ob für die Verteilungsfunktion der Laplace- Bedingung genügt und kommentieren Sie das Ergebnis.  |
| c) | Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Alkoholsünder zwischen 8 und 16 (inclusive)?   |
| d) | Die Annahme $p \leq 0,1$ für Alkoholsünder soll auf einem Signifikanzniveau von höchstens 5% getestet werden. Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich. Überprüfen Sie für den gewählten Ablehnungsbereich den Fehler 1. Art und kommentieren Sie das Ergebnis. (Rechtsseitiger Test).  |

|    |  |
|----|--|
| A3 | Ausführliche Lösung  |
| a) | Die Polizei kann bei der Überprüfung von $n = 120$ Personen mit etwa 12 Fahrverboten rechnen. Das entspricht dem Erwartungswert. |

|    |  |
|----|--|
| A3 | Ausführliche Lösung  |
| b) | Laplace- Bedingung:<br>$p = 0,1 \quad n = 120$<br>$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = \sqrt{10,8} \approx 3,29$<br>Laplace- Bedingung: $\sigma > 3$ ist erfüllt.<br>Zur Berechnung der Umgebungswahrscheinlichkeiten kann die Tabelle einer normalverteilten Zufallsvariablen verwendet werden. |

|    |  |
|----|--|
| A3 | Ausführliche Lösung  |
| c) | $P(8 \leq X \leq 16)$ , Radius = 4,5 $\Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{4,5}{\sqrt{10,8}} \approx 1,369 \Rightarrow P(8 \leq X \leq 16) \approx 0,829$<br>Die Anzahl der Alkoholsünder liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,829 zwischen 8 und 16 einschließlich. |

|    |  |
|----|--|
| A3 | <p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>c) Hypothesentest:<br/><math>p \leq 0,1 \quad \mu = 12 \quad \sigma = \sqrt{10,8} \approx 3,286</math> Signifikanzniveau <math>\alpha \leq 0,05</math><br/>Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest.<br/>Damit wird <math>\mu + 1,64 \cdot \sigma = 12 + 1,64 \cdot \sqrt{10,8} \approx 17,38</math><br/>Annahmebereich: <math>A = \{ 0 \dots 12 \dots 17 \}</math><br/>Ablehnungsbereich: <math>\bar{A} = \{ 18 \dots 120 \}</math><br/>Zu prüfen ist der Ablehnungsbereich: <math>P(18 \leq X \leq 120) \leq 0,05</math><br/><math>\{ 0 \dots 6 \} \{ 7 \dots 12 \dots 17 \} \{ 18 \dots 120 \}</math><br/><math display="block">P(18 \leq X \leq 120) = \frac{1}{2} [1 - P(7 \leq X \leq 17)]</math><br/><math display="block">P(7 \leq X \leq 17) = P(6,5 \leq X \leq 17,5) \Rightarrow r = 5,5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{5,5}{\sqrt{10,8}} \approx 1,673</math><br/><math display="block">P(7 \leq X \leq 17) \approx 0,905 \Rightarrow P(18 \leq X \leq 120) = \frac{1}{2} [1 - 0,905] \approx 0,0475</math><br/>Der Fehler 1. Art beträgt etwa 0,0475. In etwa 4,75% aller Fälle liegt das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich, so dass die wahre Hypothese <math>p \leq 0,1</math> zu Unrecht verworfen wird.</p> |
|----|--|