Schriftliche Übung Mathematik Stochastik II (Nachschreiber) Jan. 2007
SG15/25D NAME:

Lösungen

1. In einer Packung sind 10 Glühbirnen, davon sind zwei defekt.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn drei Glühbirnen „blind“ herausgegriffen werden?
   A: Alle drei Glühbirnen sind in Ordnung.
   B: Genau eine Glühbirne ist defekt.
   C: Genau zwei Glühbirnen sind defekt.

E1:
(Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

n = 10 Glühbirnen, davon sind 2 defekt. 3 Glühbirnen werden zufällig entnommen.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Packung mit 10 Glühbirnen zufällig 3 auszuwählen ist:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

A: Alle 3 Glühbirnen sind in Ordnung.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus 8 heilen Glühbirnen 3 auszuwählen ist 3 aus 8.

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $\binom{8}{3} = 56$

Damit ist $P(A) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} \approx 0,4\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, drei heile Glühbirnen auszuwählen.

B: Genau eine Glühbirne ist defekt.
Von den 8 heilen Glühbirnen werden 2 und von den 2 defekten Glühbirnen wird eine gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist : $\binom{8}{2} \cdot \binom{2}{1} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot 2 = 56$

Damit ist $P(B) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} \approx 0,4\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, das von den 3 ausgewählten Glühbirnen eine defekt ist.

C: Genau zwei Glühbirnen sind defekt.
Von 8 heilen Glühbirnen wird eine und von den 2 defekten Glühbirnen werden 2 gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist : $\binom{8}{1} \cdot \binom{2}{2} = 8 \cdot 1 = 8$

Damit ist $P(C) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} \approx 0,0\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, das von den 3 ausgewählten Glühbirnen 2 defekt sind.

2. Zum Auffädeln einer Kette stehen rote, blaue und grüne Perlen zur Verfügung.
   Es werden 6 Perlen aufgefädelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn die Farben zufällig gewählt werden?
   A: Es kommt keine rote Perle vor.
   B: Die ersten 3 Perlen sind grün.
   C: Es kommen immer abwechselnd nur rote und grüne Perlen vor.

E2:
(Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Die Farbauswahl ist zufällig, das bedeutet, jede Farbe ist gleichwahrscheinlich.
Für jede Perle stehen 3 Farben zur Verfügung.
Damit ist die Anzahl aller Möglichkeiten $3^6 = 729$

A: Es kommt keine rote Perle vor.
Die Anzahl der Möglichkeiten nur zwei Farben zu ziehen ist $2^6 = 64$
Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $2^6 = 64$

Damit ist $P(A) = \frac{64}{729} \approx 0{,}0878$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das keine Perle rot ist.

B: Die ersten drei Perlen sind grün.
Damit können die letzten 3 beliebig gewählt werden. Also <u>eine</u> Möglichkeit für ggg und 3^3 Möglichkeiten für die anderen drei.
Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1 \cdot 3^3 = 27$

Damit ist $P(B) = \frac{27}{729} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das die ersten drei Perlen grün sind.

C: Die Perlen sind abwechselnd rot und grün.
Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: rgrgrg oder grgrgr
Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: 2

Damit ist $P(C) = \frac{2}{729} \approx 0{,}00274$

die Wahrscheinlichkeit dafür, das die Perlen abwechselnd rot und grün sind.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 3 richtige im Lotto bei 6 aus 49

E3:

3 richtige im Lotto

Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 3 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen anzukreuzen ist:

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{43\cdot 42\cdot 41}{3\cdot 2\cdot 1}=246.820$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von D. Damit ist

$$P(D)=\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}=\frac{246.820}{13.983.816}\approx 0{,}0177$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (3 richtige).

4. Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es 10 Fragen mit je drei möglichen Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Jemand kreuzt nach dem Zufallsprinzip bei jeder Frage eine Antwort an.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?
   A: Alle Antworten sind falsch.
   B: Die ersten 5 sind richtig, die letzten 5 sind falsch angekreuzt.
   C: Genau die Hälfte der Antworten sind richtig.
   D: 4 Antworten sind richtig, 6 sind falsch.

E4:
10 Fragen mit je 3 möglichen Antworten.
Die Anzahl der Möglichkeiten bei 10 Fragen jeweils eine von drei möglichen Antworten anzukreuzen ist 3^{10}.
(Urne mit 3 verschiedenen Kugeln, 10 mal Ziehen mit Zurücklegen)

A: Alle Antworten sind falsch.
Bei jeder der 10 Fragen gibt es 2 Möglichkeiten falsch anzukreuzen.
Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 2^{10}

Damit ist $P(A) = \frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0173$

die Wahrscheinlichkeit dafür, alle Antworten falsch anzukreuzen.

B: Die ersten 5 Fragen sind richtig, die letzten 5 Fragen sind falsch angekreuzt.
Für die ersten 5 Fragen gibt es jeweils eine, für die zweiten 5 Fragen jeweils 2 Möglichkeiten anzukreuzen.
Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1^5 \cdot 2^5$

Damit ist $P(B) = \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} \approx 0{,}000.542$

die Wahrscheinlichkeit dafür, die ersten 5 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

C: Genau die Hälfte der Fragen sind richtig angekreuzt.
Um die 5 richtig beantworteten Fragen auf 10 Fragen zu verteilen,

gibt es $\binom{10}{5}$ Möglichkeiten. Jede einzelne hat die Wahrscheinlichkeit von B

Damit ist $P(C) = \binom{10}{5} \cdot \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} = 252 \cdot \frac{2^5}{3^{10}} \approx 0{,}137$

die Wahrscheinlichkeit dafür, genau die Hälfte der Fragen richtig zu beantworten.

D: 4 Antworten sind richtig, 6 sind falsch.

Die Anzahl der Möglichkeiten 4 Fragen auf 10 zu verteilen ist $\binom{10}{4} = 210$

Bei jeder der 6 falsch angekreuzten Fragen gibt es 2 Möglichkeiten.
Das sind 2^6 Möglichkeiten.

Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $\binom{10}{4} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6$

Damit ist $P(D) = \frac{210 \cdot 2^6}{3^{10}} \approx 0{,}228$
die Wahrscheinlichkeit dafür, 4 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

5. In einer Urne befinden sich 14 gleichgroße Kärtchen, auf denen jeweils nur ein Buchstabe aufgedruckt ist.

Kärtchen mit den Buchstaben	A	E	N	O	T
Anzahl der Kärtchen	1	4	5	1	3

Jens schlägt folgendes Spiel vor:
Aus der Urne werden mit einem Griff drei Kärtchen gezogen.
Es wird nach folgender Tabelle ausgezahlt:

gezogene Buchstaben mit	Auszahlung
1 Vokal	1€
2 Vokalen	7 €
3 Vokalen ohne E, E, E	21€
E, E, E	28 €

Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

E 5:
Unter den 14 Buchstaben gibt es 6 Vokale und 8 Konsonanten.
Die Werte der Zufallsvariablen X sind:

	1 Vokal	2 Vokale	3 Vokale ohne EEE	EEE	kein Vokal
$X = x_i$	1	7	21	28	0

Deren Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(X = x_1) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{42}{91} \text{ für 1 Vokal und 2 Konsonanten}$$

$$P(X = x_2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{30}{91} \text{ für 2 Vokale und 1 Konsonanten}$$

$$P(X = x_4) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{1}{91} \text{ für EEE}$$

$$P(X = x_3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} - \frac{1}{91} = \frac{4}{91} \text{ für 3 Vokale ohne EEE}$$

$$P(X = x_5) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{14}{91} \text{ für 3 Konsonanten}$$

Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariablen und Berechnung des Erwartungswerts:

$X = x_i$	0	1	7	21	28
$P(X = x_i)$	$\frac{14}{91}$	$\frac{42}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{4}{91}$	$\frac{1}{91}$

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot \frac{14}{91} + 1 \cdot \frac{42}{91} + 7 \cdot \frac{30}{91} + 21 \cdot \frac{4}{91} + 28 \cdot \frac{1}{91} = \frac{364}{91} = \underline{\underline{4}}$$

Bei einem Einsatz von 4 € ist das Spiel fair.