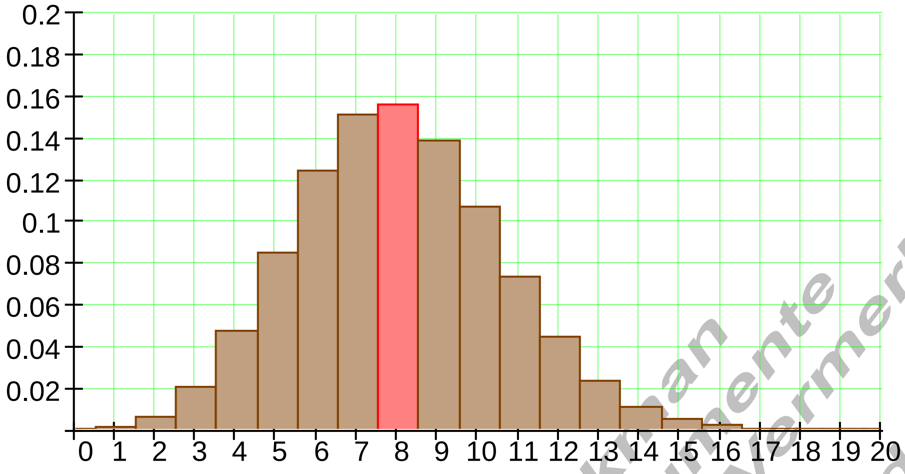
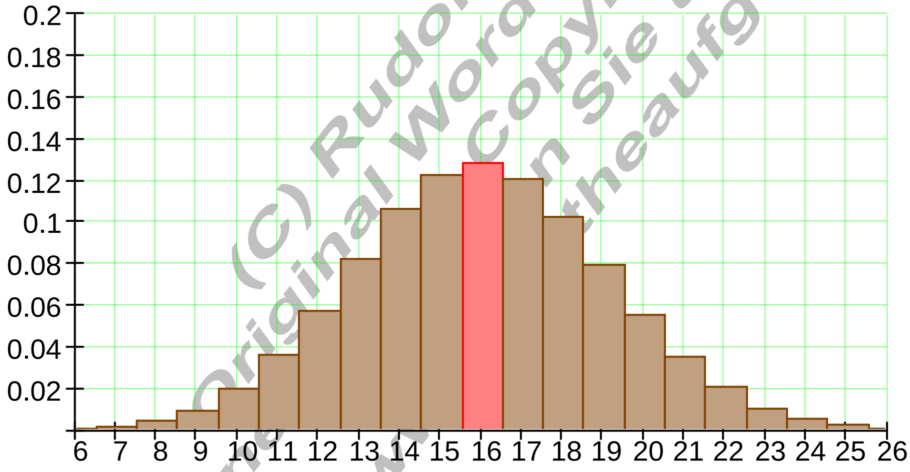
Erwartungswert binomialverteilter Zufallsgrößen.

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,2** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **8 Treffer**.



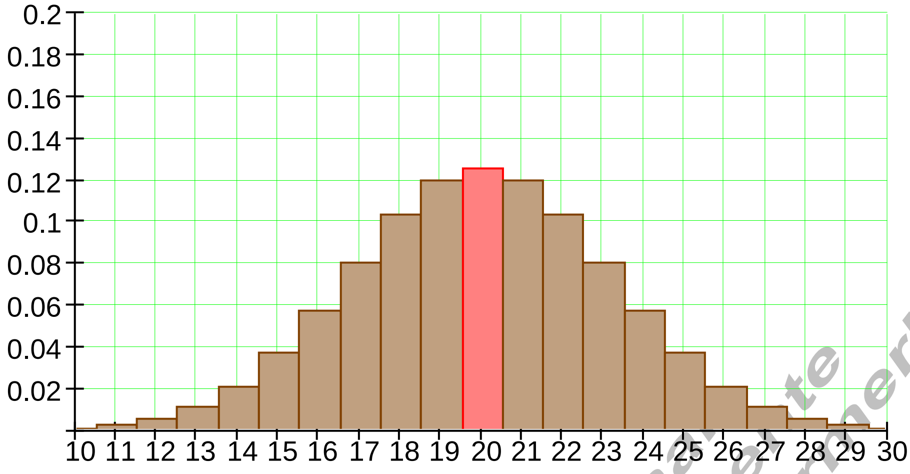
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,2

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,4** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **16 Treffer**.



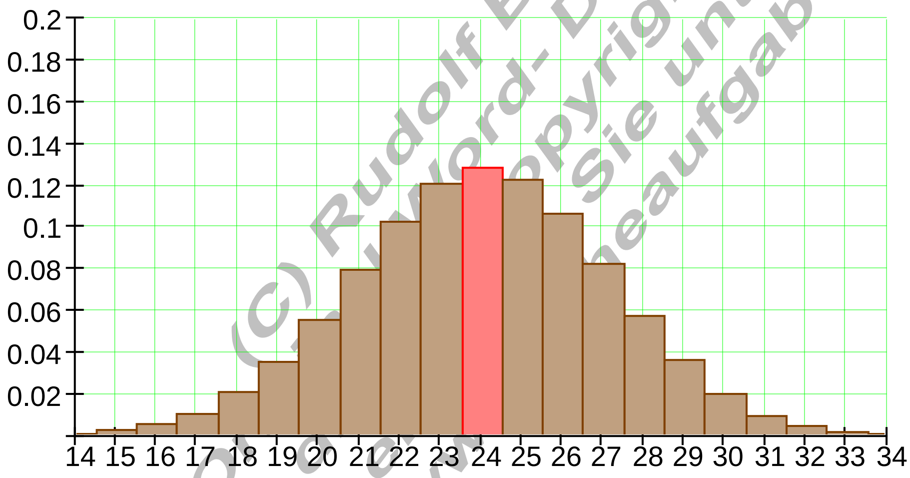
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,4

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,5** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **20 Treffer**.



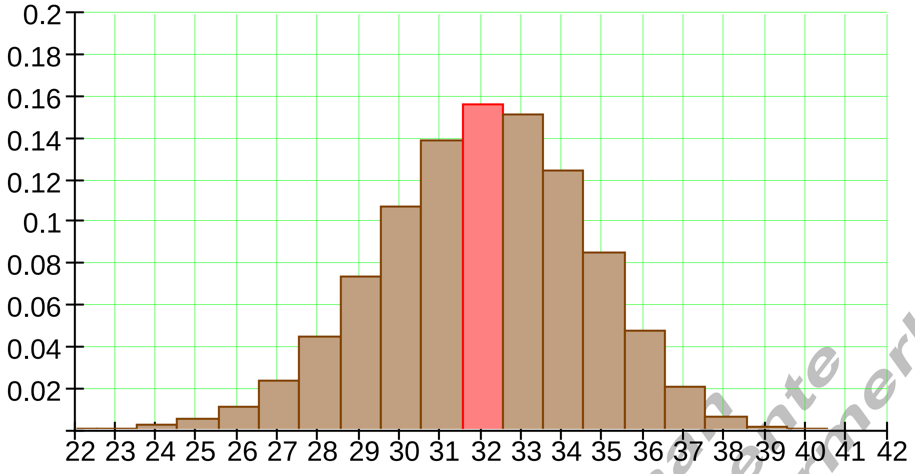
Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,5

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,6** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **24 Treffer**.



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,6

Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p = 0,8** ist, **n = 40** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **32 Treffer**..



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,8

Beim Würfeln erwarten wir, dass bei 6000 Würfen die Zahl 6 etwa 1000 mal auftritt. Das bedeutet nicht, dass die Zahl 6 tatsächlich 1000 mal auftritt. Der Erwartungswert setzt unendlich viele Experimente voraus, deren Mittelwert er darstellt.

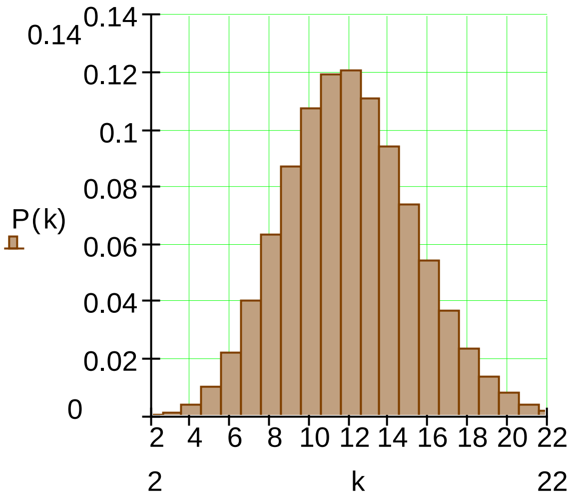
Zusammenfassend kann man sagen:
Wird ein Bernoulli- Versuch, bei dem die Trefferwahrscheinlichkeit **p** ist, **n** mal durchgeführt, dann erwarten wir im Mittel **n mal p Treffer**.

Erwartungs-wert einer Binomial-verteilung:	Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X: "Anzahl der Erfolge" $$E(X) = n \cdot p$$ Statt $E(X)$ schreiben wir auch μ (in der mathematischen Literatur üblich). Damit ist der Erwartungswert einer binomial verteilten Zufallsgröße X $$\boxed{\mu = n \cdot p}$$

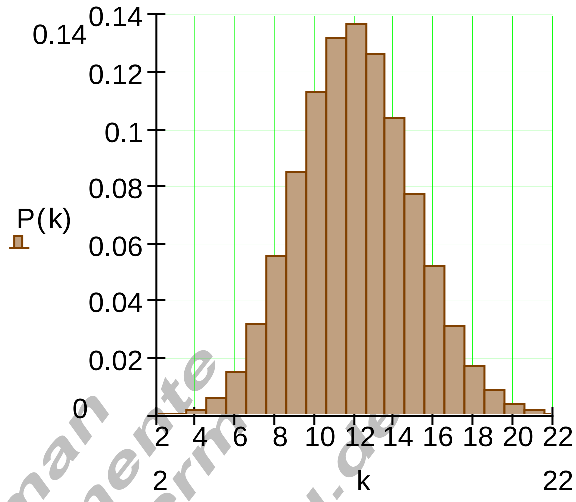
Der Beweis soll an dieser Stelle nicht geführt werden. Er kann mithilfe des Binomischen Lehrsatzes erfolgen.

Bei Betrachtung der Histogramme fällt auf, das die mit der größten Wahrscheinlichkeit auftretenden Ergebnisse dem Erwartungswert entsprechen.
Die Form der Histogramme ist ähnlich, sie entspricht der einer Glocke.
Für p = 0,5 liegen die Werte symmetrisch zum Erwartungswert.
Für p < 0,5 ist die Verteilung „linksschief“, für p > 0,5 dagegen „rechtsschief“.
In der Nähe des Erwartungswertes liegen die Ergebnisse mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.
Die Höhe einer Säule entspricht der Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Ergebnisses, ihre Breite beträgt 1 Einheit. Da aber die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperimentes immer 1 ist, ergibt die Summe aller Säulenflächen ebenfalls den Wert 1.
Die Fläche der Säulen in einem bestimmten Intervall ist somit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit aller Erfolge, die in diesem Intervall liegen.

Varianz und Standardabweichung einer binomial verteilten Zufallsgröße.



Binomialverteilung für n = 120 und p = 0,1



Binomialverteilung für n = 40 und p = 0,3

Beide Binomialverteilungen haben den gleichen Erwartungswert;

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{12}}$ $\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{12}}$

Obwohl beide Verteilungen den gleichen Erwartungswert haben sehen sie unterschiedlich aus. Wir untersuchen die Streuung um den Erwartungswert.
Aus der beschreibenden Statistik ist die Varianz, bzw. die Standardabweichung als Streumaß bekannt.
Der Ausdruck

$$s^2 = h(x_1)\cdot\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + h(x_2)\cdot\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + h(x_3)\cdot\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + \ldots + h(x_n)\cdot\left(x_n-\bar{x}\right)^2$$

wurde als Varianz einer Stichprobe bezeichnet.
Die Werte $h(x_1);h(x_2);h(x_3);\ldots;h(x_n)$ stellen relative Häufigkeiten dar.
Für die Standardabweichung galt $s = \sqrt{s^2}$

Analog hierzu definieren wir für Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

Varianz und Standard-abweichung:	Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte $x_1;x_2;x_3;x_4;\ldots;x_n$ annehmen kann und den Erwartungswert μ hat, so heißt $V(x) = P(X = x_1)\cdot(x_1-\mu)^2 + P(X = x_2)\cdot(x_2-\mu)^2 + \ldots + P(X = x_n)\cdot(x_n-\mu)^2$ die Varianz der Zufallsvariablen X. Die Quadratwurzel aus der Varianz einer Zufallsgröße heißt Standardabweichung $\boxed{\sigma = \sqrt{V(x)}}$

Speziell für Binomialverteilungen gilt:

Varianz und Standardabweichung für Binomialverteilungen:	Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrscheinlichkeit $1-p$ und der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge gilt für die Varianz: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ und für die Standardabweichung: $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Der Beweis soll an dieser Stelle nicht geführt werden.

Für die oben abgebildeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt:

Binomialverteilung für $n = 120$ und $p = 0{,}1$

Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{12}}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{120 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx \underline{\underline{3{,}286}}$

Binomialverteilung für $n = 40$ und $p = 0{,}3$

Erwartungswert:

$\mu = n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = \underline{\underline{12}}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{40 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx \underline{\underline{2{,}898}}$

Bei der ersten Verteilung ist die Streuung etwas größer als bei der zweiten.