Das Urnenmodell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Viele Zufallsexperimente können mit dem Ziehen von unterscheidbaren Kugeln aus einem Gefäß, Urne genannt, modelliert werden. In der Urne befinden sich **n** Kugeln, von denen **k** gezogen werden.

Das Ziehen kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen:

Eine Kugel wird gezogen und wieder zurückgelegt.
Das entspricht dem Urnenmodell **mit Zurücklegen**

Nach dem Ziehen der Kugel wird diese nicht wieder zurückgelegt.
Das entspricht dem Urnenmodell **ohne Zurücklegen**

Viele Zufallsexperimente können auf das Urnenmodell zurückgeführt werden. Betrachten wir das Zufallsexperiment "Dreimaliger Münzwurf", so kann man stattdessen auch aus einer Urne mit 2 verschiedenen Kugeln drei mal jeweils eine ziehen und wieder zurücklegen.

Einige Beispiele sollen die Vorzüge des Urnenmodells aufzeigen.

Zufallsexperiment	Urnenmodell
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem würfeln jeweils eine 6 zu werfen?	Urne mit 6 Kugeln nummeriert von 1 bis 6 **Zweimal ziehen mit zurücklegen.** Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(6 \mid 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 0{,}028$
In einer Klasse mit 25 Schülern haben 10 Schüler die Hausaufgaben nicht gemacht. Der Lehrer kontrolliert zufällig einen Schüler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er jemanden, der die Hausaufgaben nicht gemacht hat?	Urne mit 25 Kugeln. 15 weiße und 10 schwarze. **Einmal ziehen** Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(s) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$
Von den 120 Schüler/innen einer gymnasialen Oberstufe am Berufskolleg mit dem Schwerpunkt (Erziehungswissenschaft) sind 15% männlich. Zwei Schüler/innen werden für die Teilnahme an einem Wettbewerb ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Schüler (männlich) sind?	Urne mit 120 Kugeln. 102 weiße Kugeln (für weiblich) und 18 schwarze Kugeln (für männlich) **Zweimal ziehen ohne zurücklegen**. Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(s \mid s) = \frac{18}{120} \cdot \frac{17}{119}$ $= \frac{306}{14280} = \frac{51}{2380} \approx 0{,}021$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.mathe-aufgaben-du.de

Ein Statistisches Institut will ermittelt haben, dass bei 53% aller Geburten das Baby männlichen Geschlechtes ist.
Wie groß ist danach die Wahrscheinlichkeit, das eine Mutter aufeinanderfolgend 2 Jungen zur Welt bringt?

Urne mit 100 Kugeln.
53 blaue (für Jungen) und
47 rosa (für Mädchen)
Zweimal ziehen mit Zurücklegen
Gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(b\,|\,b) = \frac{53}{100} \cdot \frac{53}{100}$$

$$= \frac{2809}{10000} \approx 0{,}2809$$

Möglicherweise ist nicht unmittelbar klar, warum dieses Zufallsexperiment durch zweimal ziehen mit zurücklegen simuliert werden kann.
Man kann sich das so vorstellen, das die Mutter immer mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung Kinder zur Welt bringt. Das bedeutet, nach jeder Geburt herrscht wieder die gleiche Ausgangssituation. Das wird mit dem zurücklegen der Kugel simuliert.
Eine ganz andere Situation herrscht vor, wenn man von z.B. 100 neugeborenen Kindern ausgeht von denen 53% Jungen sind. Wählt man zufällig 2 Kinder aus, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man genau zwei Jungen ausgewählt hat:

$$P(j|j) = \frac{53}{100} \cdot \frac{52}{99} = \frac{53 \cdot 13}{25 \cdot 99} \approx 0{,}2784$$

Das entspräche dem ziehen ohne zurücklegen.

Bei der Herstellung von Tongefäßen geht man davon aus das 20% Ausschuss produziert wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Herstellung von 3 Gefäßen genau 2 brauchbar sind?

Modell: Urne mit 8 grünen Kugeln (brauchbar) und 2 roten Kugeln (Ausschuss).
Dreimaliges ziehen mit zurücklegen.

Ereignis A: Zwei von drei gefertigten Gefäßen sind brauchbar.
Über das Baumdiagramm erhält man die Ergebnismenge.
Die Ergebnismenge der Ziehung lautet: $S = \{ggg; ggr; grg; rgg; rrg; rgr; grr; rrr\}$
Die Ereignismenge lautet $A = \{ggr; grg; rgg\}$

$P(g) = \frac{8}{10}$=0,8 $\quad P(r) = \frac{2}{10} = 0{,}2 \quad P(gg) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \quad P(ggr) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2$

$$P(A) = P(ggr) + P(grg) + P(rgg)$$

$$= 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}384}}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokument ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

Aus vier Personen Angela (A), Balduin (B), Christin (C), Dogan (D) werden zwei zum Geschirrspülen ausgelost, wobei eine Person abspült und eine abtrocknet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt es zuerst Christin und dann Balduin?

<u>Modell:</u> Urne mit 4 Kugeln mit der Aufschrift A, B, C und D.

Zweimaliges ziehen ohne zurücklegen.

Hier kommt es auf die Reihenfolge der gezogenen Kugeln an.

Das Ereignis lautet A: zuerst Christin, dann Balduin.
Die Ergebnismenge besteht aus allen Zweierkombinationen der Buchstaben A, B, C und D, also aus

$S = \{AB;AC;AD;BA;BC;BD;CA;CB;CD;DA;DB;DC\}$

$A = \{CB\} \Rightarrow P(A) = P(CB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$

Bei einer Verkehrszählung wurde festgestellt, dass 65% der vorbeifahrenden Fahrzeuge Pkw waren, 30% Lkw und 5% sonstige Fahrzeuge.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter drei vorbeifahrenden Fahrzeugen das erste ein Pkw, das zweite ein Lkw und das dritte ein sonstiges Fahrzeug ist?

<u>Modell:</u> Urne mit 100 Kugeln, 65 rote (Pkw) 30 schwarze (Lkw) und 5 weiße (sonstiges Fahrzeug).

Dreimaliges ziehen mit Zurücklegen

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P(rsw) = \frac{65}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{5}{100} = 0{,}00975$

Ein Spieler interessiert sich dafür, wie oft er einen Würfel mindestens werfen muss, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% insgesamt mindestens eine 6 wirft.

<u>Modell</u>: Urne mit 5 roten Kugeln (keine 6) und 1 grüne Kugel (sechs geworfen).

n- maliges ziehen mit Zurücklegen
dabei ist die Zahl n unbekannt

Wir wissen bereits, dass die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen bei einem idealen Würfel 1/6 ist. Die Wahrscheinlichkeit, keine 6 zu würfeln ist 5/6.
Wir definieren dazu die Ereignisse:

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

Ereignis A: eine sechs werfen, Ereignis $\overline{A}$: keine sechs werfen (Gegenereignis)

Bei n - Würfen ist die Wahrscheinlichkeit

– in jedem Wurf eine 6 zu werfen $\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot.......\cdot\frac{1}{6}}_{\text{n mal}}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$

– in jedem Wurf keine 6 zu werfen $\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot.......\cdot\frac{5}{6}}_{\text{n mal}}=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

Das Gegenereignis von „Bei n – Würfen in jedem Wurf keine 6 zu werfen“ lautet nicht etwa „Bei n – Würfen insgesamt eine 6 zu werfen“ sondern „Bei n – Würfen insgesamt mindestens eine 6 zu werfen“.

Wir definieren nun das Ereignis E:
Bei n – Würfen insgesamt mindestens eine 6 werfen.

Das Gegenereignis lautet: $\overline{E}$: Bei n - Würfen insgesamt keine 6 werfen.

Die Wahrscheinlichkeit von $\overline{E}$ ist bereits bekannt: $P\left(\overline{E}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von E: $P(E)=1-P\left(\overline{E}\right)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

In der Aufgabenstellung war gefordert, dass $P(E)\geq 0{,}90$ sein soll.

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}90$ gesucht ist die Zahl n (Anzahl der Würfe)

Lösung durch umformen und logarithmieren.

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}90 \,|-1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0{,}1 \,|\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \,|\ln$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1) \,|:\ln\left(\frac{5}{6}\right)\approx -0{,}18<0 \Rightarrow \text{Relationszeichen } \leq \text{ umdrehen}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\approx 12{,}629$$

Man muss den Würfel mindestens 13 mal werfen um mit einer Sicherheit von mindestens 90% mindestens einmal die 6 zu erhalten.
Anders ausgedrückt: Ich darf höchstens in 10 von 100 Fällen bei 12 mal würfeln keine 6 bekommen.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter http://www.matheaufgaben-du.de