Beispiel 5 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

Beispiel 5:

1. ***Definitionsbereich:***

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$

2. ***Symmetrien:***

keine Symmetrie

3. ***Extrema:***

Ableitungen:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0\,;\, x_3 = 3$

$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage über Extremstelle bei $x_1 = 0$

da aber $x_{1/2} = 0$ doppelte Nullstelle von $f'(x)$ ist, erfolgt für $f'(x)$

an der Stelle $x_{1/2} = 0$ kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ bei $x_1 = 0$ gibt es keine Extremstelle

$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$ rel Max für $x_3 = 3$

$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \,|\, \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \,|\, 6{,}75)}$

4. ***Wendepunkte:***

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 : x_2 = 2$

$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{W1} = 0$

$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_{W2} = 2$

$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \,|\, 0)}$

$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \,|\, 4)}$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \,|\, 0)}$

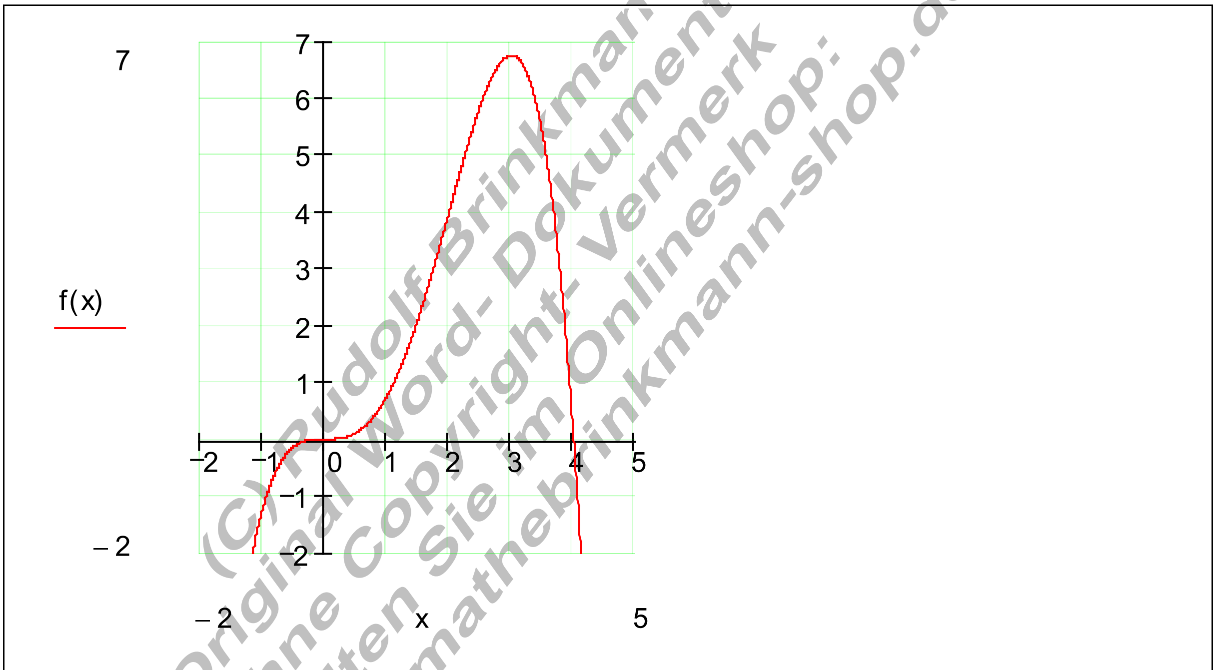
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0\,;\, x_4 = 4$

Nullstellen: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \,|\, 0)}\,;\,\boxed{P_{x4}(4 \,|\, 0)}$

6. ***Der Graph:***

	Wertetabelle: $f(-1) = -1{,}25 \,;\, f(1) = 0{,}75 \,;\, f(4{,}2) = -3{,}7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	-1	0	1	2	3	4	$4{,}2$
$f(x)$	$-1{,}25$	0	$0{,}75$	4	$6{,}75$	0	$-3{,}7$



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -1$ (links von P_{W1}) $f''(-1) = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav) }]-\infty\,;-0[}$

für $x_0 = 1$ (zwischen P_{W1} und P_{W2}) $f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex) }]0\,;2[}$

für $x_0 = 3$ (rechts von P_{W2}) $f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav) }]2\,;\infty[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $]-\infty\,;0[$

streng monoton wachsend für $]0\,;3[$

streng monoton fallend für $]3\,;\infty[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

	$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3\right)=\lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty} x^4\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4=-\infty\\&\lim_{x\to\infty} f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4=-\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty}$$

Berechnungen mit dem GTR Casio fx-CG20

3GTR

Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

Funktionsgleichung mit dem
Grafikeditor eingeben und anzeigen:

$\boxed{\text{MENU}}$ 5 (Graph)

$\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 4 $\rightarrow$ $\boxed{X,\Theta,T}$ $\boxed{\wedge}$ 4 $\rightarrow$ $\boxed{+}$ $\boxed{X,\Theta,T}$ $\boxed{\wedge}$ 3 $\rightarrow$ $\boxed{\text{EXE}}$

{DRAW}

Um den Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster auf x: [-2 ; 5] und y: [-2 ; 7] eingestellt.

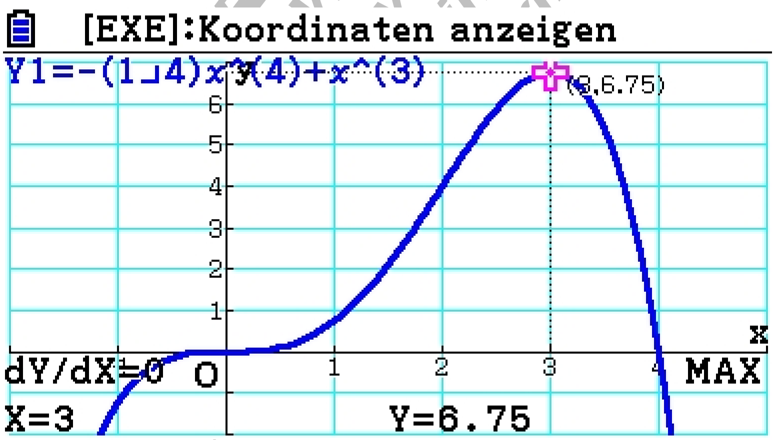
$^S\boxed{\text{V-Window}}$ $\boxed{(-)}$ 2 $\boxed{\text{EXE}}$ 5 $\boxed{\text{EXE}}$ $\downarrow\downarrow$ $\boxed{(-)}$ 2 $\boxed{\text{EXE}}$ 7 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

{DRAW}

rel. Max: $^S\boxed{\text{G-Solv}}$ {MAX} $\boxed{\text{EXE}}$ $\Rightarrow (3 \mid 6{,}75)$

rel. Min: $^S\boxed{\text{G-Solv}}$ {Min} $\boxed{\text{EXE}}$ $\Rightarrow$ nicht gefunden

P_{max} (-3 | 6,75) rel Min nicht vorhanden



Mit [EXIT] gelangt man zurück in den Grafikeditor.

4GTR

Berechnen Sie den Wendepunkt von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

Im Grafikeditor trägt man unterhalb von Y1 f' und f'' wie folgt ein:

$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d/dx\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d^2/dx^2\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

Die Wendestellen befinden sich dort, wo die zweite Ableitung Null ist.

$^{S}\ \boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{ROOT}\}$ f'' selektieren

$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \rightarrow \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,|\,0);(2\,|\,0)$

Die Wendestellen liegen bei $x_{w1} = 0$ und bei $x_{w2} = 2$

Der zugehörige Wendepunkt hat die Koordinaten:

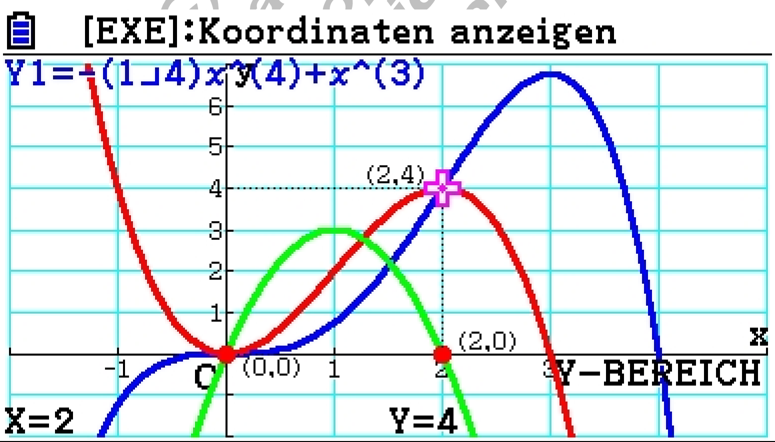
$^{S}\ \boxed{\text{G-Solv}}\ \boxed{\text{F6}}\ \{\text{Y-CAL}\}\ f(x)$ auswählen

$\boxed{\text{EXE}}\ 0\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,|\,0)$

$^{S}\ \boxed{\text{G-Solv}}\ \boxed{\text{F6}}\ \{\text{Y-CAL}\}\ f(x)$ auswählen

$\boxed{\text{EXE}}\ 2\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (2\,|\,4)$

$P_{w1}\ (0\,|\,0)\ ;\ P_{w2}\ (2\,|\,4)$

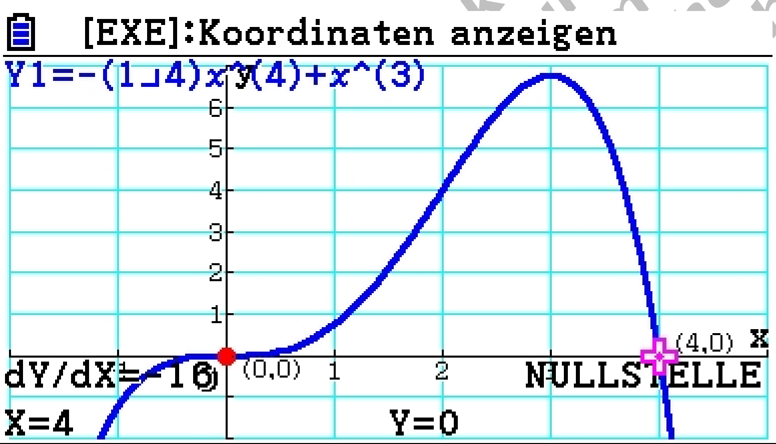


5GTR	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

Die Grafik der Funktion ist im Betrachtungsfenster aufgerufen.
Mit ^{S}[Sketch] {Cls} kann der Graph neu gezeichnet werden.

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$^S\boxed{G-Solv}\{Y-ICEPT\}\boxed{EXE} \Rightarrow (0|0)$

Nullstellen oder Schnittpunkte mit der x-Achse:
$^S\boxed{G-Solv}\{ROOT\}\boxed{EXE}(0|0) \to \boxed{EXE}(4|0)$
P_y (0 | 0) und $P_{x1/2/3}$ (0 | 0) dreifache Nullstelle ; P_{x4} (4 | 0)



6GTR	Wertetabelle erstellen für $-\frac{1}{4}x^4 + x^3$

Für das Intervall [-2 ; 5] soll eine Wertetabelle mit der Schrittweite 1 erstellt werden.
$\boxed{MENU}$ 7 (Tabelle)
$\{SET\}\boxed{(-)}\,2\,\boxed{EXE}\,5\,\boxed{EXE}\,1\,\boxed{EXE}\,\boxed{EXE}$
$\{TABLE\}$
Wertetabelle (gerundet auf 2 Stellen):

			$P_{x1/2/3}$ $P_{w1}; P_y$		P_{w2}	P_{max}	P_{x4}	
x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−12	−1,25	0	0,75	4	6,75	0	−31,25