Beispiel 3 zur Kurvendiskussion

Beispiele in Kurzform:

Beispiel 3:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x)=-\frac{1}{2}x(x+3)^3=-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x$ $\boxed{D=\mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** keine Symmetrie
3.	***Extrema:*** Ableitung über Produktregel: $f(x)=\underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ $u=-\frac{1}{2}x\,;\,v=(x+3)^3\,;\,u'=-\frac{1}{2}\,;\,v'=3(x+3)^2$ $\Rightarrow \boxed{f'(x)}=-\frac{1}{2}(x+3)^3-\frac{3}{2}x(x+3)^2=\boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$ $f'(x)=\underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v}\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$ $u=-\frac{1}{2}(x+3)^2\,;\,v=4x+3\,;\,u'=-(x+3)\,;\,v'=4$ $\Rightarrow \boxed{f''(x)}=-(x+3)(4x+3)-\frac{1}{2}(x+3)^2\cdot 4=\boxed{-3(x+3)(2x+3)}$ $f''(x)=\underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v}\Rightarrow f'''(x)=u'v+uv'$ $u=-3(x+3)\,;\,v=2x+3\,;\,u'=-3\,;\,v'=2$ $\Rightarrow \boxed{f'''(x)}=-3(2x+3)-3(x+3)\cdot 2=\boxed{-(12x+27)}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)=0\Rightarrow x_{1/2}=-3\,;\,x_3=-\frac{3}{4}$ $f''(x_{1/2})=f''(-3)=0\Rightarrow$ keine Aussage über Extremstellen $f''(x_3)=f''\left(-\frac{3}{4}\right)=-3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right)=-\frac{81}{8}=-10{,}125<0$ $\Rightarrow$ rel. Max. für $x_3=-\frac{3}{4}$ $x_{1/2}=-3$ ist doppelte Nullstelle von $f'(x)$, d.h. kein Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$ an der Stelle $x=-3$. Das bedeutet, $x_{1/2}=-3$ ist keine Extremstelle. $f(x_3)=f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3=\frac{2187}{512}\approx 4{,}27$ $\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4}\,\middle|\,\frac{2187}{512}\right)\text{ bzw. }P_{Max}(-0{,}75\,\vert\,4{,}27)}$

4. ***Wendepunkte:***

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x_1=-3\,;\,x_2=-\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1)=f'''(-3)=-(12\cdot(-3)+27)\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1}=-3$$

$$f'''(x_2)=f'''\left(-\frac{3}{2}\right)=-\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right)\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1})=f(-3)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3=0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3\,|\,0)}$$

$$f(x_{W2})=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3=\frac{81}{32}\approx 2{,}53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1{,}5\,|\,2{,}53)}$$

5. ***Achsenschnittpunkte:***

$$f(0)=0 \Rightarrow \boxed{P_y(0\,|\,0)}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_{2/3/4}=-3$$

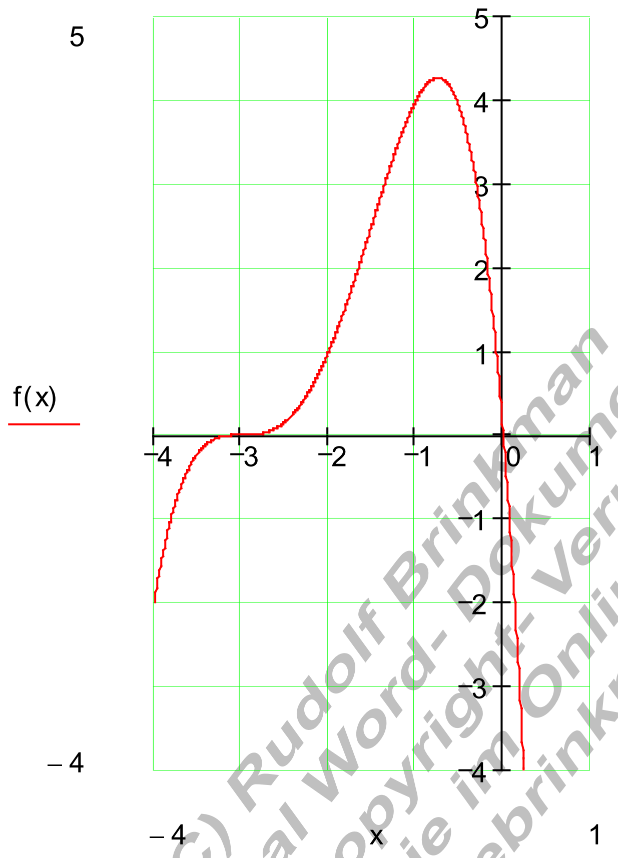
Nullstellen: $\boxed{P_{x1}(0\,|\,0)}\,;\,\boxed{P_{x2/3/4}(-3\,|\,0)}$

6. ***Der Graph:***

Wertetabelle :

$f(-4)=-2\,;\,f(-2)=1;\,f(-1)=4\,;\,f(0{,}5)\approx -10{,}72$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}75$	0	$0{,}5$
$f(x)$	-2	0	1	$2{,}53$	4	$4{,}27$	0	$-10{,}72$



7. *Krümmungsverhalten und Monotonie:*

Krümmung:

für $x_0 = -4$ (links von P_{W1}) $f''(-4) = -5 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \ \left]-\infty\,;-3\right[}$

für $x_0 = -2$ (rechts von P_{W1}) $f''(-2) = 1 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)} \ \left]-3\,;-1{,}5\right[}$

für $x_0 = -1$ (rechts von P_{W2}) $f''(-1) = -2 < 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \ \left]-1{,}5\,;\infty\right[}$

Monotonie:

streng monoton wachsend für $\left]-\infty\,;-3\right[$

streng monoton wachsend für $\left]-3\,;-\frac{3}{4}\right[$

streng monoton fallend für $\left]-\frac{3}{4}\,;\infty\right[$

8. *Randpunkte des Definitionsbereiches:*

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

Berechnungen mit dem GTR Casio fx-CG20

3GTR

Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x$

Funktionsgleichung mit dem
Grafikeditor eingeben und anzeigen:

$\boxed{\text{MENU}}\ 5\quad \text{(Graph)}$

$\boxed{(-)}\ 1\ \boxed{a^{b/c}}\ 2 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\wedge}\ 4 \rightarrow \boxed{-}\ 9\ \boxed{a^{b/c}}\ 2 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\wedge}\ 3$

$\rightarrow \boxed{-}\ 27\ \boxed{a^{b/c}}\ 2 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ 27\ \boxed{a^{b/c}}\ 2 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

Um den Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster
auf x: [-4 ; 1] und y: [-4 ; 5] eingestellt.

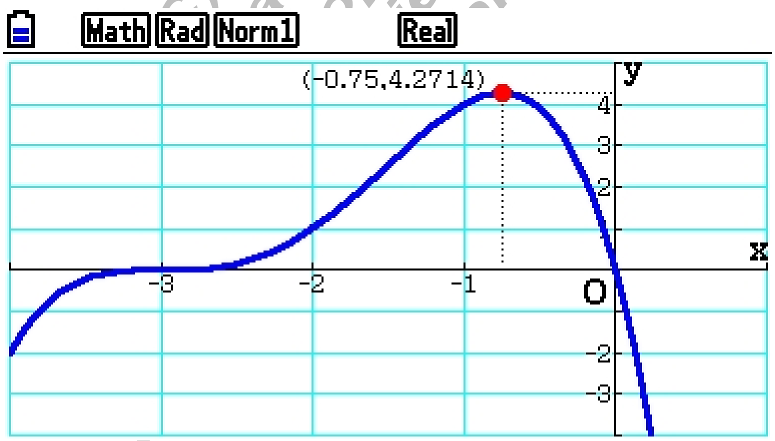
$^{S}\boxed{\text{V-Window}}\ \boxed{(-)}\ 4\ \boxed{\text{EXE}}\ 1\ \boxed{\text{EXE}} \downarrow \downarrow \boxed{(-)}\ 4\ \boxed{\text{EXE}}\ 5\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{DRAW}\}$

rel. Max: $^{S}\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{MAX}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-0{,}75 \mid 4{,}27..)$

rel. Min: $^{S}\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{Min}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow$ nicht gefunden

P_{max} (-0,75 | 4,27..) rel Min nicht vorhanden

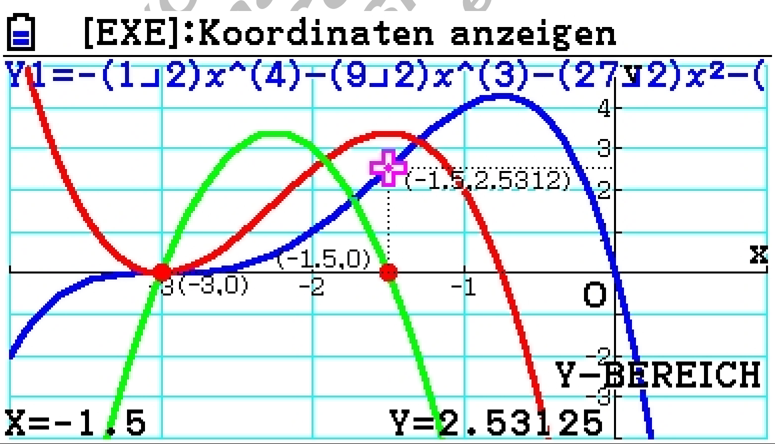


Mit [EXIT] gelangt man zurück in den Grafikeditor.

3GTR	Extremwertberechnung von $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x$ im Run Matrix Menü
	Die Nullstellen der 1. Ableitung von f(x) werden mit **SolveN** berechnet und angezeigt. Setzt man einen der angezeigten Werte in f(x) ein, so erhält man den dazugehörigen Extremwert, falls dieser existiert. $\text{SolveN}\left(\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)\Big\vert_{x=\square}\right) \Rightarrow \left\{-3\,;-\frac{3}{4}\right\}$ $-\frac{3}{4} \to X \Rightarrow -\frac{3}{4}$ $-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x \Rightarrow \frac{2187}{512} \Rightarrow P_{max}\left(-\frac{3}{4} \,\vert\, \frac{2187}{512}\right)$ $\frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)\Big\vert_{x=\boxed{-3}} \Rightarrow 0$ $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)\Big\vert_{x=\boxed{-3.1}} \Rightarrow 0{,}047$ $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)\Big\vert_{x=\boxed{-2.9}} \Rightarrow 0{,}043$ Die Rechnung zeigt, dass für x = -3 f''(-3) = 0 ist, bzw. an der Stelle x = -3 für f'(x) kein Vorzeichenwechsel stattfindet. Das bedeutet, an der Stelle x = -3 befindet sich zwar eine waagerechte Tangente aber kein Extremwert.

<table>
<tr><td>4GTR</td><td>Berechnen Sie die Wendepunkte von $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x$</td></tr>
<tr><td></td><td>Im Grafikeditor trägt man unterhalb von Y1 f' und f'' wie folgt ein:
$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d/dx\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$
$\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d^2/dx^2\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$
$\{\text{DRAW}\}$
Die Wendestellen befinden sich dort, wo die zweite Ableitung Null ist.
$^S\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{ROOT}\}$ f'' selektieren
$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \rightarrow \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-3\,|\,0);(-1{,}5\,|\,0)$
Die Wendestellen liegen bei x_{w1} = -3 und bei x_{w2} = -1,5

Der zugehörige Wendepunkt hat die Koordinaten:
$^S\boxed{\text{G-Solv}}\ \boxed{\text{F6}}\ \{\text{Y-CAL}\}$ f(x) auswählen
$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{(-)}3\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-3\,|\,0)$
$^S\boxed{\text{G-Solv}}\ \boxed{\text{F6}}\ \{\text{Y-CAL}\}$ f(x) auswählen
$\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{(-)}1.5\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (-1{,}5\,|\,2{,}53..)$
P_{w1} (-3 | 0) ; P_{w2} (-1,5 | 2,53..)


</td></tr>
</table>

4GTR Wendepunktkoordinaten in Bruchdarstellung mit **SolveN**

Die Nullstellen von $f''(x) = -6x^2 - 27x - 27$ liefern die Wendestellen.
Die Nullstellen von $f''(x)$ also x_{w1} und x_{w2} werden mit **SolveN** berechnet und in Liste 3 abgespeichert.

$$\text{SolveN}\left(-6x^2-27x-27\right) \to \text{List } 3 \Rightarrow \left\{-3\,;-\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{List } 3\,[1] \to X \Rightarrow -3$$

$$-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \Rightarrow 0$$

$$\text{List } 3\,[2] \to X \Rightarrow -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \Rightarrow \frac{81}{32}$$

$$P_{w1}\left(-3\,|\,0\right);P_{w2}\left(-\frac{3}{2}\,|\,\frac{81}{32}\right)$$

5GTR Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x$$

Die Grafik der Funktion ist im Betrachtungsfenster aufgerufen.
Mit ^{S}[Sketch] {Cls} kann der Graph neu gezeichnet werden.

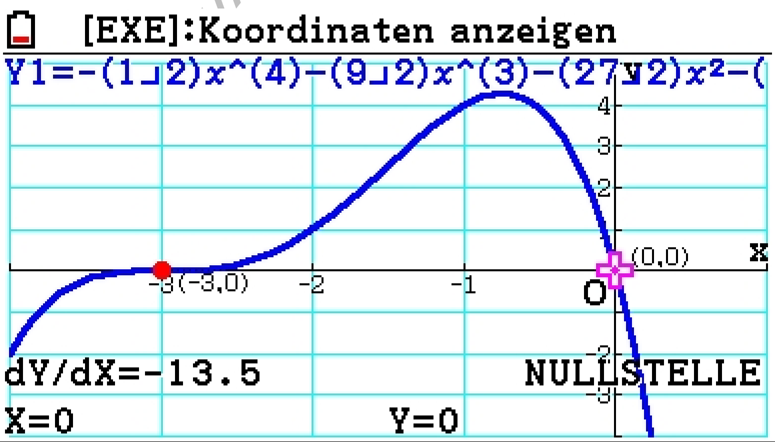
Schnittpunkt mit der y-Achse:

$^S\ \boxed{\text{G}-\text{Solv}}\ \{\text{Y}-\text{ICEPT}\}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,|\,0)$

Nullstellen oder Schnittpunkte mit der x-Achse:

$^S\ \boxed{\text{G}-\text{Solv}}\ \{\text{ROOT}\}\ \boxed{\text{EXE}}\ (-3\,|\,0) \to \boxed{\text{EXE}}\ (0\,|\,0)$

P_y (0 | 0) und $P_{x1/2/3}$ (-3 | 0) dreifache Nullstelle ; P_{x4} (0 | 0)



6GTR

Wertetabelle erstellen für $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x$

Für das Intervall [-4 ; 1] soll eine Wertetabelle mit der Schrittweite 1 erstellt werden.

$\boxed{\text{MENU}}\ 7 \quad (\text{Tabelle})$

$\{\text{SET}\}\ \boxed{(-)}\ 4\ \boxed{\text{EXE}}\ 1\ \boxed{\text{EXE}}\ 1\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}}$

$\{\text{TABLE}\}$

Wertetabelle (gerundet auf 2 Stellen):

		$P_{x1/2/3}$ P_{w1}		P_{w2}		P_{max}	P_y ; P_{x4}	
x	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}75$	0	1
y	-2	0	1	$2{,}53$	4	$4{,}27$	0	-32