Beispiel 1 zur Kurvendiskussion

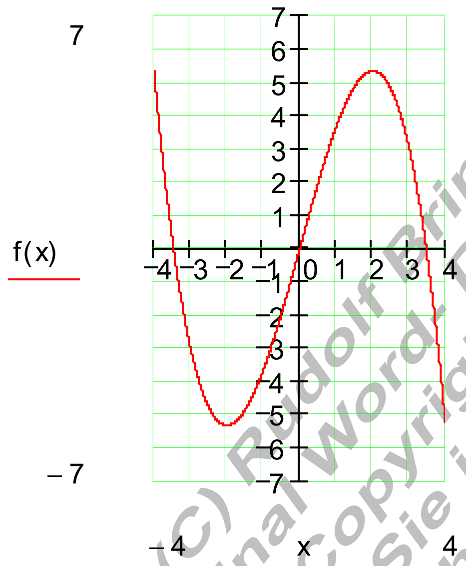
Beispiele in Kurzform:

Beispiel 1:

1.	***Definitionsbereich:*** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$
2.	***Symmetrien:*** Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$ da nur ungerade Exponenten
3.	***Extrema:*** Ableitungen: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ bzw. $x_2 = -2$ $f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ rel Max für $x_1 = 2$ $f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow$ rel Min für $x_2 = -2$ $f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$ $f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$
4.	***Wendepunkte:*** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$ $f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$ $f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$
5.	***Achsenschnittpunkte:*** $f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12}$ bzw. $x_3 = -\sqrt{12}$ Nullstellen: $\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)}$; $\boxed{P_{x2}\left(\sqrt{12} \mid 0\right)}$; $\boxed{P_{x3}\left(-\sqrt{12} \mid 0\right)}$
6.	***Der Graph:***

$f(-4) = 5{,}3\,;\, f(4) = -5{,}3\,;\, f(-3) = -3\,;\, f(3) = 3\,;\, f(-1) = -3{,}7\,;\, f(1) = 3{,}7$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	$5{,}3$	0	-3	$-5{,}\overline{3}$	$-3{,}7$	0	$3{,}7$	$5{,}\overline{3}$	3	0	$-5{,}3$



7. ***Krümmungsverhalten und Monotonie:***

Krümmung:

für $x_0 = -2$ (links von P_W) $f''(-2) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Linkskrümmung (konvex)} \ \left]-\infty\,;0\right[}$

für $x_0 = 2$ (rechts von P_W) $f''(2) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Rechtskrümmung (konkav)} \ \left]0\,;\infty\right[}$

Monotonie:

streng monoton fallend für $\left]-\infty\,;-2\right[$

streng monoton wachsend für $\left]-2\,;2\right[$

streng monoton fallend für $\left]2\,;\infty\right[$

8. ***Randpunkte des Definitionsbereiches:***

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to\infty} x^3 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty\end{matrix}}$$

Berechnungen mit dem GTR Casio fx-CG20

3GTR

Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

Funktionsgleichung mit dem
Grafikeditor eingeben und anzeigen:

$\boxed{\text{MENU}}$ 5 (Graph)

$\boxed{(-)}$ 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 3 $\rightarrow$ $\boxed{X,\Theta,T}$ $\boxed{\wedge}$ 3 $\rightarrow$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{X,\Theta,T}$ $\boxed{\text{EXE}}$

{DRAW}

Um den Graphen optimal anzuzeigen, wird das Betrachtungsfenster auf x: [-4 ; 4] und y: [-6 ; 6] eingestellt.

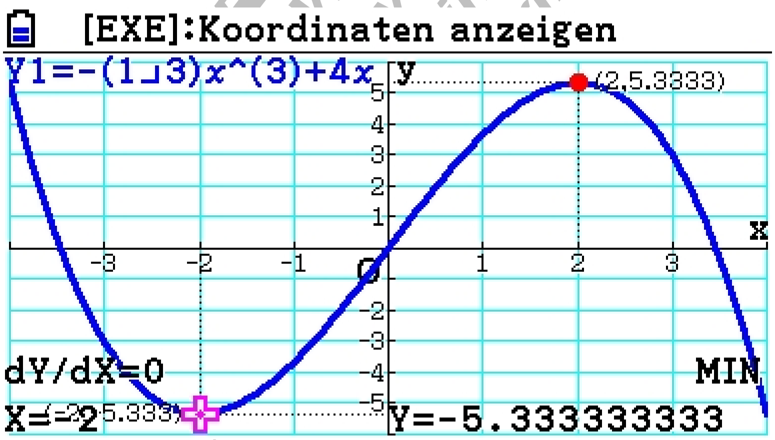
$^S\boxed{\text{V-Window}}$ $\boxed{(-)}$ 4 $\boxed{\text{EXE}}$ 4 $\boxed{\text{EXE}}$ $\downarrow\downarrow$ $\boxed{(-)}$ 6 $\boxed{\text{EXE}}$ 6 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

{DRAW}

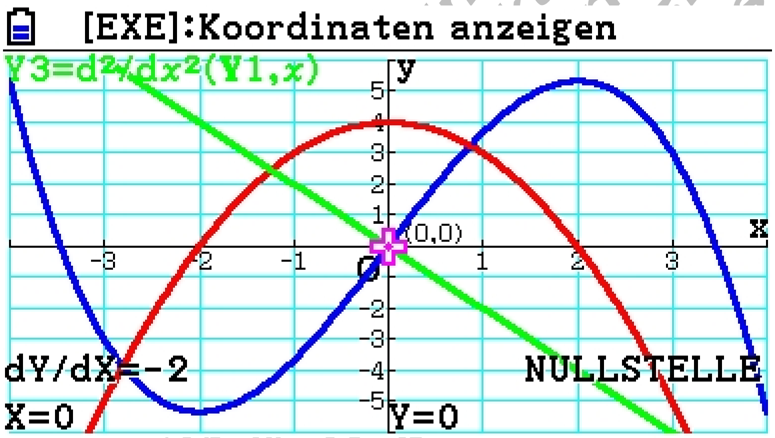
rel. Max: $^S\boxed{\text{G-Solv}}$ {MAX} $\boxed{\text{EXE}}$ $\Rightarrow (2 \mid 5{,}333..)$

rel. Min: $^S\boxed{\text{G-Solv}}$ {Min} $\boxed{\text{EXE}}$ $\Rightarrow (-2 \mid -5{,}333..)$

P_{max} (2 | 5,333..) ; P_{min1} (-2 | -5,333)



Mit [EXIT] gelangt man zurück in den Grafikeditor.

4GTR	Berechnen Sie den Wendepunkt von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$
	Im Grafikeditor trägt man unterhalb von Y1 f' und f'' wie folgt ein: $\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d/dx\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{OPTN}}\ \{\text{CALC}\}\ \{d^2/dx^2\}\ \{Y\}\ 1 \rightarrow \boxed{X,\Theta,T}\ \boxed{\text{EXE}}$ $\{\text{DRAW}\}$ Die Wendestelle liegt dort, wo die zweite Ableitung Null ist. $^S\boxed{\text{G-Solv}}\ \{\text{ROOT}\}\ f''$ selektieren $\boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,\vert\,0)$ Die Wendestelle liegen bei $x_w = 0$  Der zugehörige Wendepunkt hat die Koordinaten: $^S\boxed{\text{G-Solv}}\ \boxed{\text{F6}}\ \{\text{Y-CAL}\}\ f(x)$ auswählen $\boxed{\text{EXE}}\ 0\ \boxed{\text{EXE}}\ \boxed{\text{EXE}} \Rightarrow (0\,\vert\,0)$ $P_w\ (\ 0\ \vert\ 0\ )$

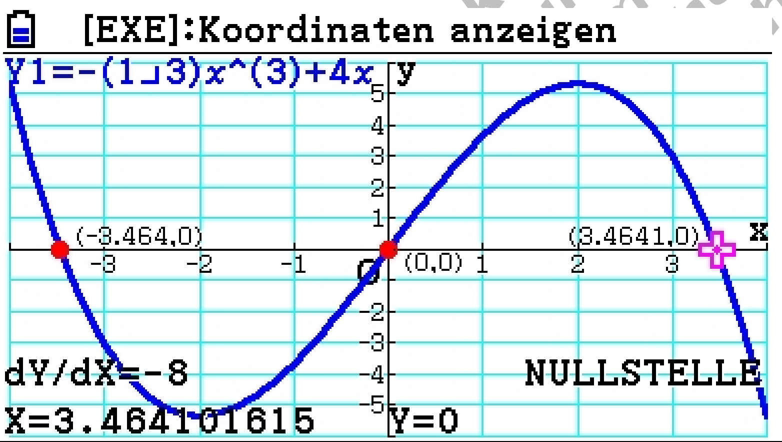
5GTR Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

Die Grafik der Funktion ist im Betrachtungsfenster aufgerufen.
Mit S[Sketch] {Cls} kann der Graph neu gezeichnet werden.

Schnittpunkt mit der y-Achse:
$^{S}\boxed{G-Solv}\{Y-ICEPT\}\boxed{EXE} \Rightarrow (0|0)$

Nullstellen oder Schnittpunkte mit der x-Achse:
$^{S}\boxed{G-Solv}\{ROOT\}\boxed{EXE}(-3{,}46..|0) \rightarrow \boxed{EXE}(0|0) \rightarrow \boxed{EXE}(3{,}46..|0)$

P_y (0 | 0) und P_{x1} (-3,46 | 0) ; P_{x2} (0 | 0) ; P_{x3} (3,46.. | 0)



6GTR Wertetabelle erstellen für $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

Für das Intervall [-4 ; 4] soll eine Wertetabelle mit der Schrittweite 1 erstellt werden.

$\boxed{MENU}$ 7 (Tabelle)

$\{SET\}\boxed{(-)}\ 4\ \boxed{EXE}\ 4\ \boxed{EXE}\ 1\ \boxed{EXE}\ \boxed{EXE}$

$\{TABLE\}$

Wertetabelle (gerundet auf 2 Stellen):

		P_{x1}		P_{min}		$P_y;P_w;P_{x2}$
x	–4	–3,46	–3	–2	–1	0
y	5,33	0	–3	–5,33	–3,66	0
		P_{max}		P_{x3}		
x	1	2	3	3,46	4	
y	3,66	5,33	3	0	–5,33	