Vektoren im kartesischen Koordinatensystem

Rechengesetze für Vektoren in Koordinatendarstellung

Addition und Subtraktion von Vektoren:

Vektoren werden addiert, bzw. subtrahiert, indem man die einander entsprechenden Komponenten addiert bzw. subtrahiert.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 \pm b_2)\overrightarrow{e_2} + (a_3 \pm b_3)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:
Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$ Berechnen Sie den Vektor: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5+3 \\ -1-0-2 \\ 3-1-5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, werden alle Komponenten des Vektors mit dem Skalar multipliziert.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

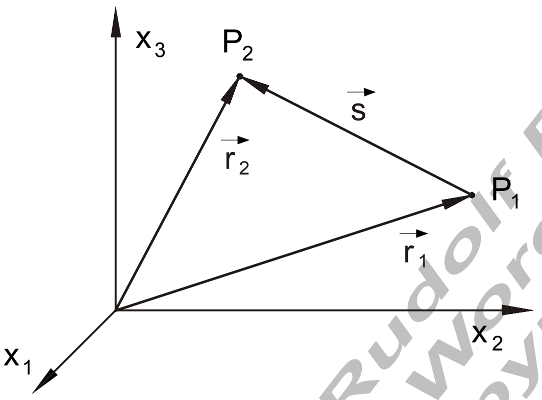
$$\Rightarrow u \cdot \vec{a} = ua_1\overrightarrow{e_1} + ua_2\overrightarrow{e_2} + ua_3\overrightarrow{e_3} = u \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot a_1 \\ u \cdot a_2 \\ u \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel:
Gegeben sind die drei Vektoren:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ Berechnen Sie den Vektor: $\vec{d}=\overrightarrow{3a}-2\vec{b}+\overrightarrow{4c}$

$$\vec{d}=3\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\-2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\8\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-8-4\\-6+2+8\\3-6+16\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-3\\4\\13\end{pmatrix}}}$$

Beispiel:
Der Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 im dreidimensionalen Raum soll bestimmt werden.



Die Ortsvektoren zu den Punkten sind:

$$P_1(x_{11}\mid x_{12}\mid x_{13})\Rightarrow \vec{r}_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\end{pmatrix}$$

$$P_2(x_{21}\mid x_{22}\mid x_{23})\Rightarrow \vec{r}_2=\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor der beiden Punkte sei $\vec{s}$

$$\vec{r}_1+\vec{s}=\vec{r}_2\,|-\vec{r}_1 \Leftrightarrow \vec{s}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\begin{pmatrix}x_{21}-x_{11}\\x_{22}-x_{12}\\x_{23}-x_{13}\end{pmatrix}$$

Der Betrag des Verbindungsvektors beider Punkte entspricht ihrem Abstand voneinander im dreidimensionalen Raum.

Wegen $\left|\vec{a}\right|=a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ gilt:

$$\left|\vec{s}\right|=s=\sqrt{(x_{21}-x_{11})^2+(x_{22}-x_{12})^2+(x_{23}-x_{13})^2}=\overline{P_1P_2}$$

Bemerkung: Bei der Indizierung der Koordinaten x_{ij} steht der erste Index für den Punkt P_i und der zweite Index für die Koordinatenachse.

Das Skalarprodukt:

Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

Diese werden zunächst formal miteinander multipliziert:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}\right)\cdot\left(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}\right)$$
$$= a_1b_1\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} + a_1b_2\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} + a_1b_3\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}$$
$$+ a_2b_1\vec{e_2}\cdot\vec{e_1} + a_2b_2\vec{e_2}\cdot\vec{e_2} + a_2b_3\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}$$
$$+ a_3b_1\vec{e_3}\cdot\vec{e_1} + a_3b_2\vec{e_3}\cdot\vec{e_2} + a_3b_3\vec{e_3}\cdot\vec{e_3}$$

Beachtet man, dass für zwei senkrecht aufeinanderstehender Vektoren das Skalarprodukt Null und das Quadrat eines Einheitsvektors 1 ist, vereinfacht sich obenstehender Ausdruck sehr.

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_2}\right|\cdot\cos\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right) = 1\cdot 1\cdot\cos\left(90^0\right) = 1\cdot 1\cdot 0 = 0 \text{ da } \vec{e_1}\perp\vec{e_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_1} = 0 \qquad \vec{e_1}\cdot\vec{e_3} = \vec{e_3}\cdot\vec{e_1} = 0 \qquad \vec{e_2}\cdot\vec{e_3} = \vec{e_3}\cdot\vec{e_2} = 0}$$

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = \left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_1}\right|\cdot\cos\left(\vec{e_1},\vec{e_1}\right) = 1\cdot 1\cdot\cos\left(0^0\right) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \text{ da } \vec{e_1} \text{ parallel zu } \vec{e_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = 1 \qquad \vec{e_2}\cdot\vec{e_2} = 1 \qquad \vec{e_3}\cdot\vec{e_3} = 1}$$

Damit wird:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Die Skalarmultiplikation lässt sich auch mit Spaltenvektoren durchführen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)^T \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)^T\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Beispiel:
Welchen Winkel schließen beide Vektoren miteinander ein?

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(3 \mid -2 \mid 1\right)^T\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 + 2 + 3 = 17$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} \approx 5{,}099$$

$$\cos\left(\alpha\right) = \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{17}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}891 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 26{,}996^0}}$$

Das vektorielle Produkt:

Ähnlich wie beim skalaren Produkt wird zuerst formal multipliziert.
Danach wird vereinfacht. Dazu sollte man sich die Regeln für das Kreuzprodukt noch mal ansehen.
Es gilt:
$\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

$\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ wobei $0\le\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le\pi.$

Für die Basisvektoren des kartesichen Koordinatensystems gilt insbesondere:

$$\left|e_1\times e_1\right|=\left|e_1\right|\cdot\left|e_1\right|\cdot\sin\left(e_1,e_1\right)=1\cdot1\cdot\sin\left(0^0\right)=1\cdot1\cdot0=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_1}=\vec{0}\qquad\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2}=\vec{0}\qquad\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_3}=\vec{0}}$$

$$\left|e_1\times e_2\right|=\left|e_1\right|\cdot\left|e_2\right|\cdot\sin\left(e_1,e_2\right)=1\cdot1\cdot\sin\left(90^0\right)=1\cdot1\cdot1=1$$

$\Rightarrow\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_3}$ da $\overrightarrow{e_3}\perp\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ ist und den Betrag 1 hat.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

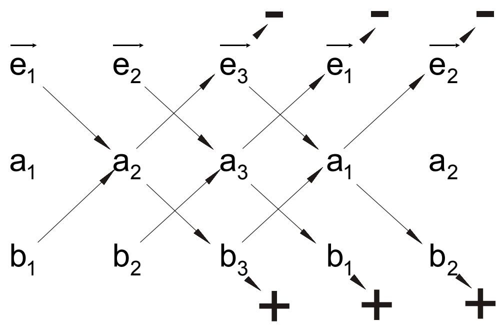
$\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2}=-\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_2}$

Formale Multiplikation:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}\right)\times\left(b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3}\right)\\&=a_1b_1\left(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_1}\right)+a_1b_2\left(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\right)+a_1b_3\left(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_3}\right)\\&+a_2b_1\left(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_1}\right)+a_2b_2\left(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2}\right)+a_2b_3\left(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}\right)\\&+a_3b_1\left(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}\right)+a_3b_2\left(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_2}\right)+a_3b_3\left(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_3}\right)\\&=0+a_1b_2\overrightarrow{e_3}-a_1b_3\overrightarrow{e_2}-a_2b_1\overrightarrow{e_3}+0+a_2b_3\overrightarrow{e_1}+a_3b_1\overrightarrow{e_2}-a_3b_2\overrightarrow{e_1}+0\\&=\underline{\underline{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\overrightarrow{e_1}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\overrightarrow{e_2}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\overrightarrow{e_3}}}\end{aligned}$$

Der Aufbau der Formel lässt sich als dreireihige Determinante darstellen.
Diese kann nach der Regel von Sarrus berechnet werden so dass sie die Berechnungsformel liefert.
Um die Regel von Sarrus anzuwenden, werden zunächst die erste und die zweite Spalte noch einmal hinter die Determinante geschrieben. Anschließend werden alle diagonalen Verbindungen dreier Elemente gebildet und zwar 3 mal von links oben nach rechts unten, sowie 3 mal von links unten nach rechts oben. Die Produkte dieser jeweils drei Faktoren werden gebildet. Die so entstandenen Produkte werden zu einer Summe zusammengefasst und zwar derart, dass die Produkte von links oben nach rechts unten positiv und die von links unten nach rechts oben negativ zählen.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\Rightarrow$$



$$=\vec{e_1}\,a_2\,b_3+\vec{e_2}\,a_3\,b_1+\vec{e_3}\,a_1\,b_2-b_1\,a_2\,\vec{e_3}-b_2\,a_3\,\vec{e_1}-b_3\,a_1\,\vec{e_2}$$
$$=\left(a_2\,b_3-a_3\,b_2\right)\vec{e_1}+\left(a_3\,b_1-a_1\,b_3\right)\vec{e_2}+\left(a_1\,b_2-a_2\,b_1\right)\vec{e_3}$$

Beispiel:
Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$$

Das vektorielle Produkt aus beiden Vektoren soll gebildet werden.
Das Ergebnis ist mit einer geeigneten Rechnung zu überprüfen.

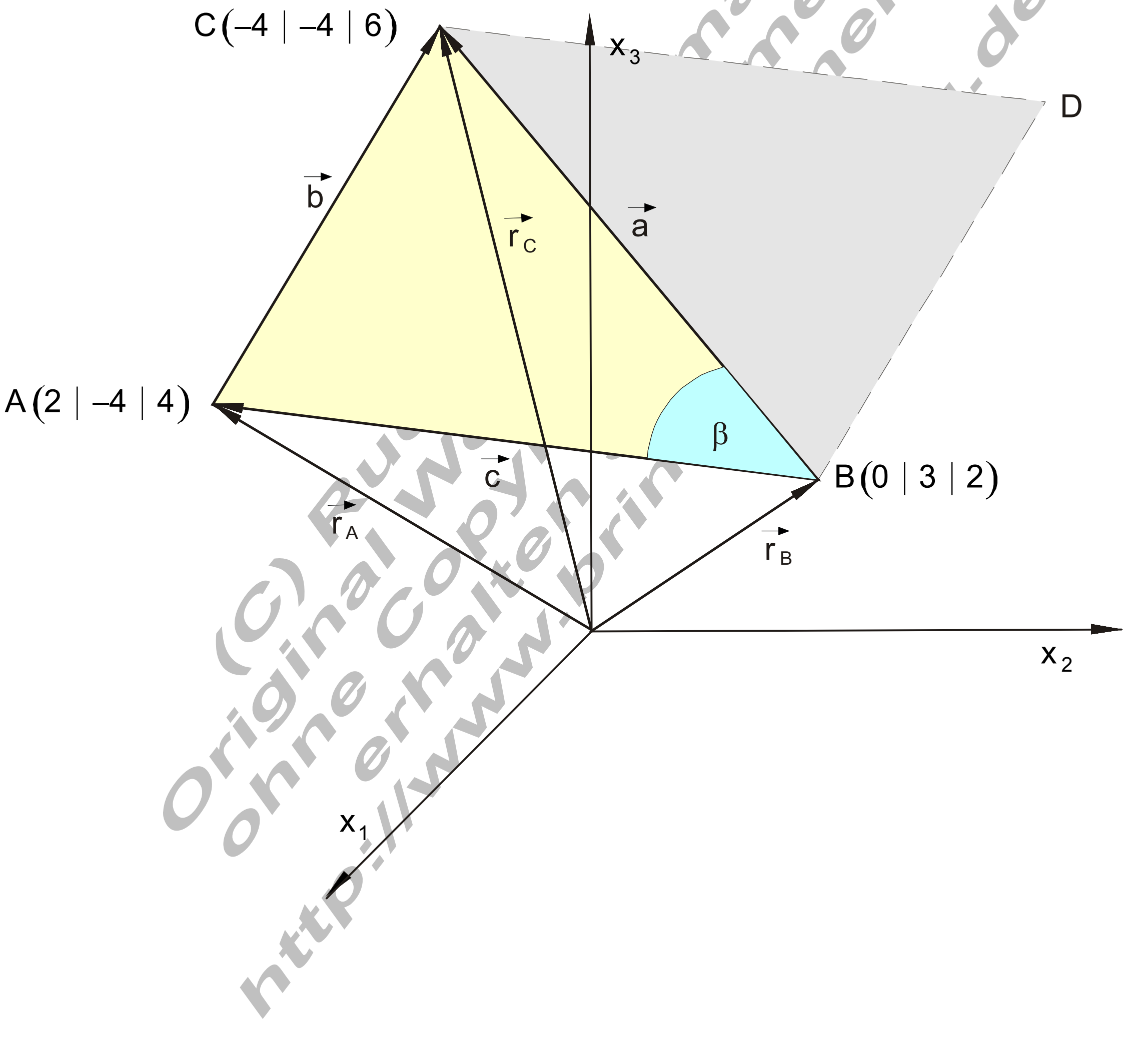
$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{matrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{e_1} & \vec{e_2}\\ 3 & -2\\ 4 & -1\end{matrix}=-6\vec{e_1}+4\vec{e_2}-3\vec{e_3}-\left(-8\vec{e_3}-1\vec{e_1}+9\vec{e_2}\right)$$
$$=-6\vec{e_1}+4\vec{e_2}-3\vec{e_3}+8\vec{e_3}+1\vec{e_1}-9\vec{e_2}$$
$$=-5\vec{e_1}-5\vec{e_2}+5\vec{e_3}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$$

Die Probe kann mit dem skalaren Produkt durchgeführt werden.
Das Kreuzprodukt beider Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht zu der Ebene liegt, die von den beiden Vektoren aufgespannt wird. Demzufolge muss das skalare Produkt des Ergebnisvektors mit beiden Vektoren den Wert Null ergeben.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\left(-5\mid-5\mid5\right)^T\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=-15+10+5=0$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\left(-5\mid-5\mid5\right)^T\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}=-20+5+15=0$$

Beispiel:
Die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks haben die Koordinaten A(2 | -4 | 4); B(0 | 3 | 2) und C(-4 | -4 | 6).
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist zu berechnen. Das Ergebnis ist mit den Formeln der ebenen Trigonometrie zu überprüfen.
Vorüberlegung:
Eine Zeichnung soll die geometrische Darstellung zeigen.
Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht zu der Ebene verläuft, die von den beiden Vektoren aufgespannt wird und dessen Betrag dem Flächeninhalt des Parallelogramms entspricht, das sich aus den beiden Vektoren bilden lässt. Die Diagonalen des Parallelogramms teilen dieses in jeweils zwei deckungsgleiche Dreiecke auf. Damit ist die Dreiecksfläche die Hälfte des Betrages vom Kreuzprodukt.



Die Ortsvektoren und die Vektoren der Dreiecksseiten werden ermittelt:

$$\vec{r_A}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\qquad \vec{r_B}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\qquad \vec{r_C}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}:\quad \vec{r_B}+\vec{a}=\vec{r_C}\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{r_C}-\vec{r_B}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-0\\-4-3\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}:\quad \vec{r_A}+\vec{b}=\vec{r_C}\Leftrightarrow \vec{b}=\vec{r_C}-\vec{r_A}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-2\\-4+4\\6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}:\quad \vec{r_B}+\vec{c}=\vec{r_A}\Leftrightarrow \vec{c}=\vec{r_A}-\vec{r_B}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0\\-4-3\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-7\\2\end{pmatrix}$$

Die Fläche des eingezeichneten Parallelogramms erhält man über das Kreuzprodukt:

$$\vec{a}\times\vec{c}=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{e_1}&\vec{e_2}&\vec{e_3}&\vec{e_1}&\vec{e_2}\\-4&-7&4&-4&-7\\2&-7&2&2&-7\end{array}\right.=-14\vec{e_1}+8\vec{e_2}+28\vec{e_3}-\left(-14\vec{e_3}-28\vec{e_1}-8\vec{e_2}\right)$$

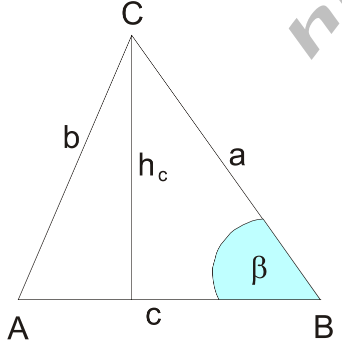
$$=-14\vec{e_1}+8\vec{e_2}+28\vec{e_3}+14\vec{e_3}+28\vec{e_1}+8\vec{e_2}$$

$$=14\vec{e_1}+16\vec{e_2}+42\vec{e_3}=\begin{pmatrix}14\\16\\42\end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|=\sqrt{14^2+16^2+42^2}=\sqrt{2216}\approx 47{,}074$$

$$\text{Dreiecksfläche: } \underline{\underline{A=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2216}}{2}\approx 23{,}537}}$$

Ergebniskontrolle:



$$A=\frac{c\cdot h_c}{2}\text{ mit } c=\left|\vec{c}\right| \text{ und } a=\left|\vec{a}\right|$$

h_c wird mit dem Sinus des Winkels β berechnet.

$$\cos(\beta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}\Rightarrow \beta=a\cos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}\right)$$

$$\sin(\beta)=\frac{h_c}{\left|\vec{a}\right|}\Leftrightarrow h_c=\left|\vec{a}\right|\cdot\sin(\beta)\Rightarrow A=\frac{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\sin(\beta)}{2}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9 \qquad \left|\vec{c}\right| = \sqrt{4+49+4} = \sqrt{57}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \left(-4 \mid -7 \mid 4\right)^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -8+49+8 = 49$$

$$\cos(\beta) = \frac{49}{9\cdot\sqrt{57}} \approx 0{,}712 \Rightarrow \beta = a\cos\left(\frac{49}{9\cdot\sqrt{57}}\right) \approx 43{,}852^0$$

$$\sin(\beta) = \sin\left(a\cos\left(\frac{49}{9\cdot\sqrt{57}}\right)\right) \approx 0{,}693$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{57}\cdot 9\cdot\sin\left(a\cos\left(\frac{49}{9\cdot\sqrt{57}}\right)\right)}{2} \approx \underline{\underline{23{,}537}}$$

Die Probe bestätigt die erste Rechnung.

<u>Zusammenfassung.</u>

Addition und Subtraktion von Vektoren	$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_1 \pm b_1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_2 \pm b_2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_3 \pm b_3\right)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	$u\vec{a} = ua_1\overrightarrow{e_1} + ua_2\overrightarrow{e_2} + ua_3\overrightarrow{e_3} = u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cdot a_1 \\ u\cdot a_2 \\ u\cdot a_3 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)^T \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$ Weiterhin gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ und $a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Das vektorielle Produkt	$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$ $= \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\overrightarrow{e_3}$ Weiterhin gilt: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$