Das vektorielle Produkt

Wird ein Vektor mit einer Zahl multipliziert, so ist das Ergebnis wieder ein Vektor. Diese Art der Multiplikation nennt man S- Multiplikation.
Wird ein Vektor mit einem Vektor multipliziert, so ist das Ergebnis eine Zahl, Skalar genannt. Diese Art der Multiplikation nennt man Skalarmultiplikation.

Darüber hinaus gibt es eine Multiplikationsart, bei der das Ergebnis wieder ein Vektor ist. Diese Art der Multiplikation nennt man Vektormultiplikation oder vektorielles Produkt, manchmal auch Kreuzprodukt genannt.

Bevor wir uns mit Anwendungen dieser Multiplikationsart beschäftigen, soll zunächst geklärt werden, wie ein solches Produkt definiert ist.

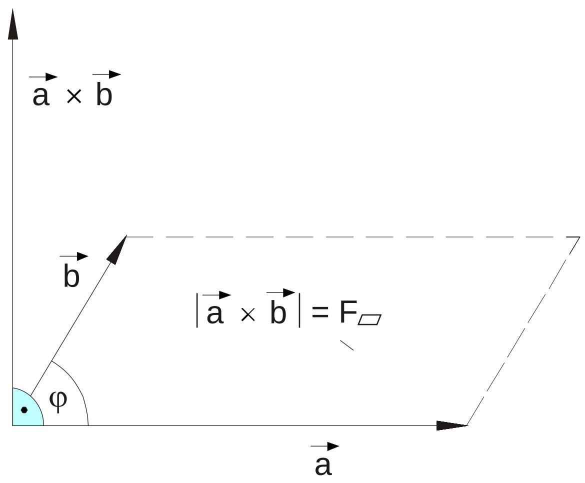
Definition	Unter dem vektoriellen Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man einen Vektor, $\vec{a}\times\vec{b}$, der durch folgende Bedingungen charaktrisiert ist: 1. $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, 2. $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. 3. $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ wobei $0 \le \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \le \pi$.

Merke:
Direkt aus obiger Definition folgt:
Das vektorielle Produkt zweier Vektoren hat den Wert Null, wenn wenigsten einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder wenn die beiden Vektoren parallel sind.
Auch die Umkehrung gilt:
Ist das Vektorprodukt zweier Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist gleich Null, so sind sie parallel.
Aus der 3. Bedingung der Definition folgt, dass ein Vektorprodukt dann seinen größten Wert besitzt, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel 90 grad ist.

Nebenstehende Zeichnung soll das vektorielle Produkt graphisch verdeutlichen.

$\vec{a}\times\vec{b}$ ist ein Vektor,
der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht,
derart, dass $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ ein Rechtssystem bilden.

Sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelelogramms.



Rechtssystem bedeutet: Dreht man den ersten Vektor im Uhrzeigersinn in Richtung des zweiten, so bewegt sich der dritte wie eine Schraube mit Rechtsgewinde in seiner Richtung voran.

Rechengesetze für vektorielle Produkte

Für jede Zahl $\{k\} \in \mathbb{R}$ und $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\} \in V^3$ als Vektoren gilt:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$	Alternativgesetz
$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$	Distributivgesetz
$\left(k\vec{a}\right)\times\vec{b} = k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$	Gemischtes Assoziativgesetz

Beispiele zur Anwendung der Rechenregeln

Beispiel 1:

Berechnen Sie: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right) &= \vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{v}\\ &= \vec{0}-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)+\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)+\vec{0} = \underline{\underline{\vec{0}}}\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet: $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}$ und $\vec{u}\times\vec{v} = -\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$

Beispiel 2:

Berechnen Sie: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right) &= \vec{u}\times\vec{u}-\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v}\\ &= \vec{0}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{0} = \underline{\underline{2\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)}}\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet: $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}$ und $-\vec{u}\times\vec{v} = \vec{v}\times\vec{u}$

Beispiel 3:

Berechnen Sie formal den Winkel zwischen zwei Vektoren

Berechnen Sie: $\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

Lösung:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\cdot b\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

$$\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)} = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b} : \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} = \frac{a\cdot b\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}} = \underline{\underline{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}}$$