Grundbegriffe der Vektorrechnung

Vektor und Skalar

Ein Teil der in Naturwissenschaft und Technik auftretenden Größen ist bei festgelegter Maßeinheit durch die Angabe einer Maßzahl vollständig bestimmt.
Solche Größen sind beispielsweise:
Länge, Masse, Arbeit, Energie, Zeit, Temperatur und Potential.
Diese Größen können auf einer Skala dargestellt werden und heißen deshalb skalare Größen oder Skalare.
Größen, die zu ihrer eindeutigen Bestimmung neben der Angabe der Maßzahl noch die der Richtung benötigen, heißen vektorielle Größen oder Vektoren.
Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind solche Größen.
Vektoren werden durch Pfeile dargestellt. Die Pfeillänge bestimmt den Betrag des Vektors, die Richtung des Pfeils bestimmt die Richtung des Vektors.
Ein Vektor ist somit im Vergleich zu einem Skalar eine gerichtete Größe.

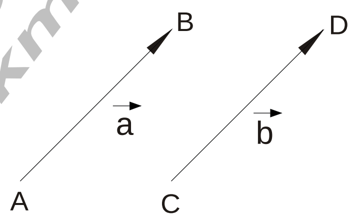
Unterschieden werden freie Vektoren, liniengebundene Vektoren und ortsgebundene Vektoren.

Die wesentliche Eigenschaft eines freien Vektors ist, dass er entlang seiner Wirkungslinie und parallel im Raum verschoben werden darf.
Vektoren von gleicher Länge und gleicher Richtung sind einander gleich.

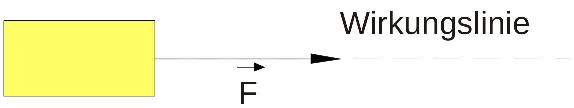
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$

$\overline{AB} = \left|\vec{a}\right| = a$

$\overline{CD} = \left|\vec{b}\right| = b$



Die Kraft, die an einem Körper angreift, stellt einen liniengebundenen Vektor dar. Dieser darf entlang seiner Wirkungslinie beliebig verschoben werden, nicht aber parallel dazu.

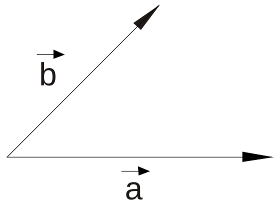


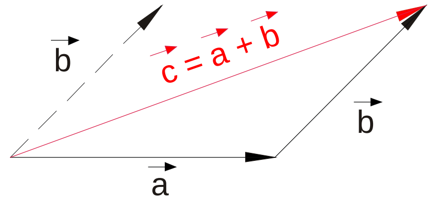
Ein ortsgebundener Vektor, auch Ortsvektor genannt hat einen festen Angriffspunkt und darf nicht verschoben werden.

Addition von Vektoren.

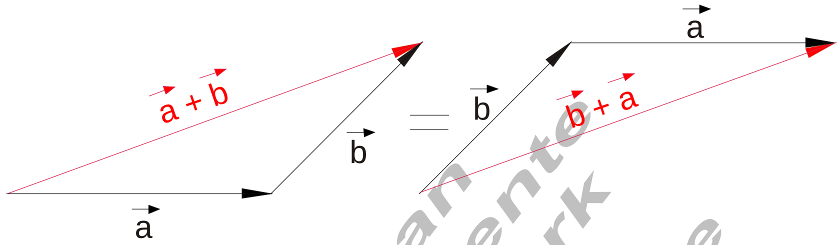
Einen Vektor $\vec{b}$ zu einem Vektor $\vec{a}$ addieren heißt, den Vektor $\vec{b}$ parallel zu sich selbst so zu verschieben, dass sein Anfangspunkt auf den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ fällt.
Die Verbindung des Anfangspunktes von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt von $\vec{b}$ ergibt den Summenvektor $\vec{c}$. $\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}}$

Addition zweier Vektoren

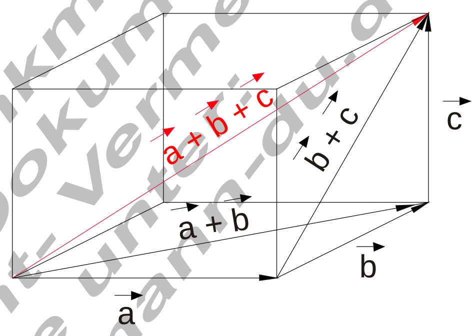




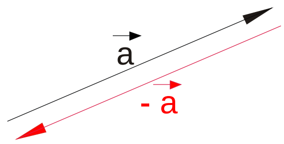
Für die Addition zweier Vektoren
gilt das Kommutativgesetz.
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



Bei der Addition von drei Vektoren müssen diese nicht in einer Ebene liegen.
Jeder der drei Vektoren ist eine gerichtete Strecke im Raum.
Die drei Vektoren können ein räumliches Gebilde aufspannen.
Es gilt das Assoziativgesetz:
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$



Zwei betragsgleiche Vektoren mit entgegengesetzter Richtung heißen Gegenvektoren. Addiert man diese, so erhält man als Summe einen Vektor, dessen Anfangspunkt mit seinem Zielpunkt zusammenfällt. Da der Betrag dieses Summenvektors Null ist, heißt er Nullvektor. Er hat keine bestimmte Richtung.

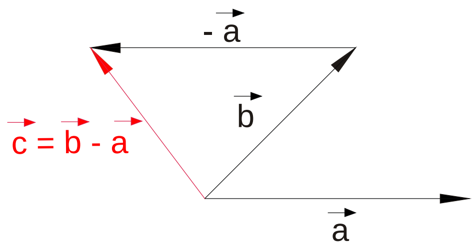


$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

Subtraktion von Vektoren.

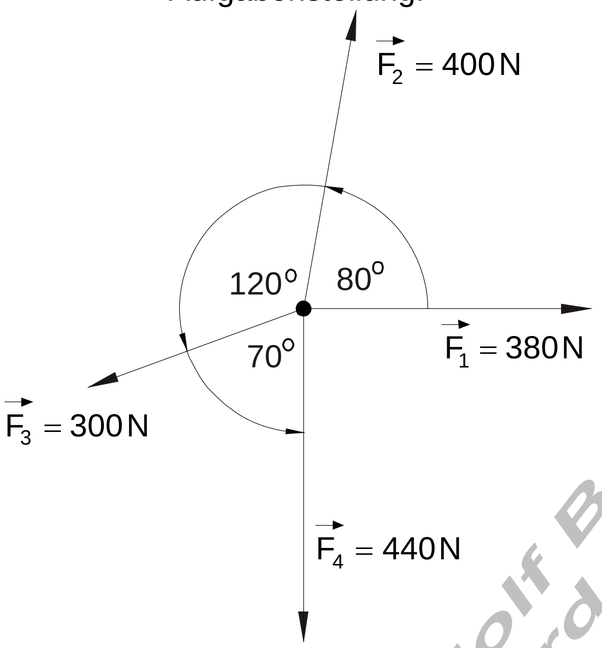
Subtraktion zweier Vektoren

Die Vektorsubtraktion kann auf die Vektoraddition zurückgeführt werden.
Ein Vektor wird subtrahiert, indem man den Gegenvektor addiert.

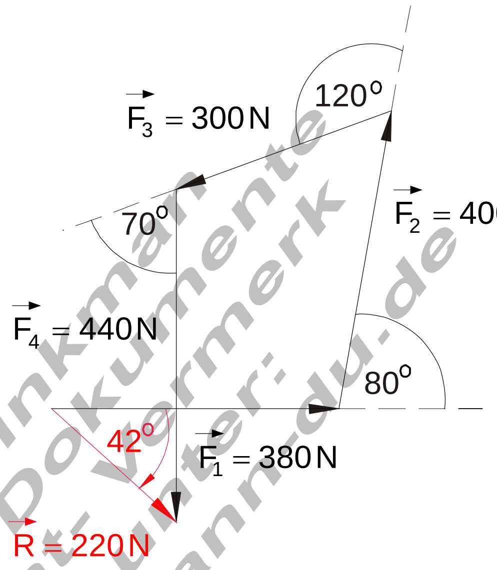


Beispiel 1:
Vektoraddition zeichnerisch.
An einem Stromverteilermast greifen in einem Punkt 4 Kräfte an, die in einer Ebene liegen sollen. Zeichnerisch ist der Betrag und die Richtung der Resultierenden zu bestimmen. Zeichenmaßstab: 1 cm entspricht 100N.

Aufgabenstellung:



Zeichnerische Lösung:

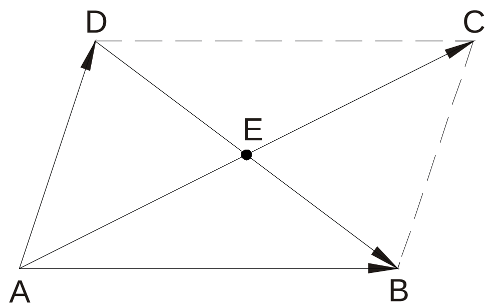


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$\Rightarrow \left|\vec{R}\right| = 220\,N \text{ und } \sphericalangle\left(\vec{F}_1, \vec{R}\right) = -42^0$$

Der Betrag der Resultierenden beträgt 220 N. Das bedeutet, an dem Verteilermast wirkt eine Restkraft von 220 N.
Die Wirkungsrichtung beträgt in Bezug auf $\vec{F}_1$ -42^0 oder 318^0
Bemerkung:
Gegen den Uhrzeigersinn (links herum) werden Winkel von der Bezugsgeraden ausgehend positiv gezählt, im Uhrzeigersinn (rechts herum) hingegen negativ.

Die zeichnerische Lösung ist immer nur eine Näherungslösung. Sie ist nur so genau, wie gezeichnet werden kann. Eine rechnerische Lösung, die in einem späteren Kapitel behandelt wird liefert als exaktes Ergebnis:
$\left|\vec{R}\right| = 224{,}009\,N$ und $\sphericalangle\left(\vec{F}_1, \vec{R}\right) = -41{,}585^0$

Beispiel 2:
Gesucht ist die Entfernung des Halbierungspunktes E der Strecke $\overline{DB}$ vom Punkt A, wenn B der Endpunkt des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und D der Endpunkt des Vektors $\overrightarrow{AD}$ ist und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ vom Punkte A ausgehen.



Lösung:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Da E der Halbierungspunkt der Strecke $\overline{DB}$ ist, gilt:

$\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{DB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2}$

Für $\overrightarrow{AE}$ gilt dann $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$

Für die Strecke $\overline{AE}$ gilt: $\overline{AE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$

Da aber $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ist, muss E auch Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AC}$ sein.

Damit ist bewiesen, dass im Parallelogramm die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert werden.

<u>Kosinus- und Sinussatz als Hilfsmittel für Vektorberechnungen.</u>

Bislang wurden Vektoren zeichnerisch addiert. Ergebnisse von zeichnerischen Lösungen sind nicht immer genau.

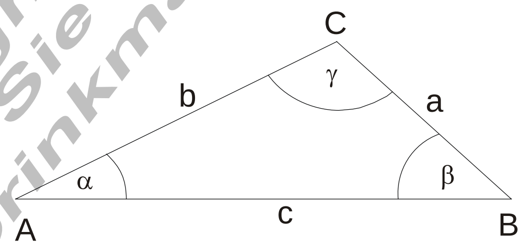
Kosinussatz:

In jedem Dreieck lässt sich das Quadrat einer Seite aus den beiden anderen Seiten und deren eingeschlossenem Winkel berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$

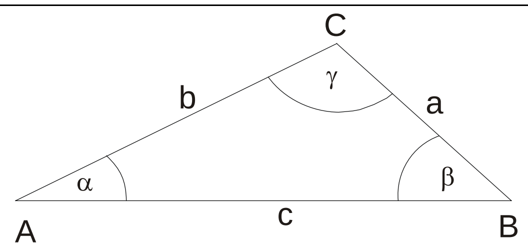
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Sinussatz:

In jedem Dreieck ist das Verhältnis von Seitenlänge zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels für alle Seiten dasselbe:

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$



Beispiel 3

Zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit $\left|\vec{F}_1\right| = F_1 = 60\,N$ und $\left|\vec{F}_2\right| = F_2 = 40\,N$ schließen miteinander einen Winkel von $\alpha = 50^0$ ein.

Wie groß ist die resultierende Kraft $\vec{R}$? Welchen Winkel bildet $\vec{R}$ mit $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$?

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \measuredangle\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ ist $\alpha = 50^0$

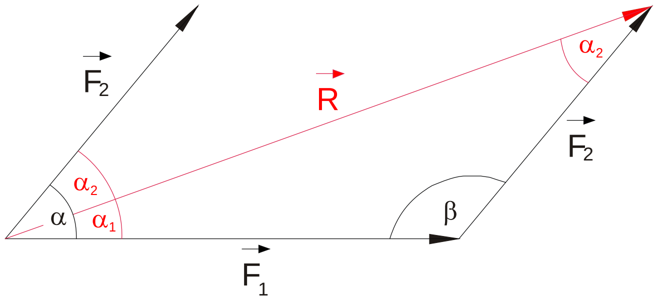
$\beta = 180^0 - 50^0 = 130^0$

Nach dem Kosinussatz gilt:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\beta)}$

$= \sqrt{\left(60^2 + 40^2 - 2 \cdot 60 \cdot 40 \cdot \cos\left(130^0\right)\right) N^2}$

$\approx \underline{\underline{91{,}024\,N}}$



Nach dem Sinussatz gilt:

$\frac{R}{F_2} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha_1)} \Leftrightarrow \sin(\alpha_1) = \frac{F_2}{R} \cdot \sin(\beta)$

$\sin(\alpha_1) = \frac{40}{91{,}024} \cdot \sin\left(130^0\right) \approx 0{,}337$

$\Rightarrow \alpha_1 = \arcsin(0{,}337) \approx \underline{\underline{19{,}672^0}}$ ist der von R und F_1 eingeschlossene Winkel.

Da α_1 und α_2 sich zu $\alpha = 50^0$ ergänzen, wird der zwischen F_2 und R liegende Winkel

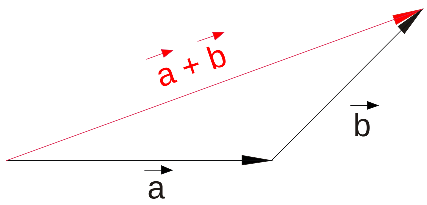
$\alpha_2 = 50^0 - \alpha_1 = 50^0 - 19{,}672^0 \approx \underline{\underline{30{,}328^0}}$

Zusammenfassung:

1. Ein Vektor ist eine gerichtete, orientierte Strecke im Raum.

2. Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag, Richtung und Orientierung übereinstimmen.

3. Zwei Vektoren werden addiert, indem man den Anfangspunkt des einen Vektors an die Spitze des anderen setzt.
   Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ zeigt dann vom Anfangspunkt des ersten Vektors zum Endpunkt des zweiten Vektors.



4. Vektor und Gegenvektor haben den gleichen Betrag und die gleiche Richtung, aber entgegengesetzte Orientierung.

5. Den Differenzvektor $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ erhält man, indem man zu $\vec{b}$ den Gegenvektor von a addiert:
   $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + \left(-\vec{a}\right)$