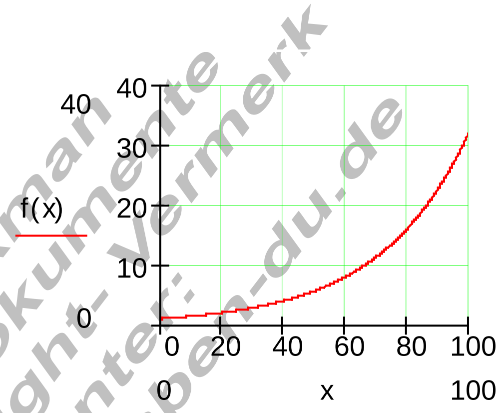
Anwendungen der Exponentialfunktion

Aufstellen der Funktionsgleichung :

Coli – Bakterien verrichten ihre Arbeit im menschlichen Darm.
Sie vermehren sich durch Zellteilung.
Unter günstigen Bedingungen teilen sie sich alle 20 Minuten.
Für diesen Vorgang stellen wir eine Wertetabelle auf und zeichnen den Graphen.
Dabei steht die Variable x für die Zeit in Minuten.
Die Variable y gibt die Anzahl der Bakterien an.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32



Nun besteht die Aufgabe darin, den funktionalen Zusammenhang in Form einer Funktionsgleichung f(x) zu bestimmen.

Alle 20 Minuten verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien. Wir müssen also die vorhandene Anzahl nach jeweils 20 Minuten mit 2 multiplizieren.

Wir machen folgenden Ansatz: $f(x) = 2^x$

Dabei ist f(x) die Anzahl der Bakterien und x die Zahl der Minuten.
Bei dieser Funktionsgleichung würde sich die Bakterienzahl jede Minute verdoppeln.
Durch Überlegung gelangen wir zu folgender Funktionsgleichung, die den Sachverhalt richtig beschreibt:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

Probe: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$; $x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2$; $x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$

Vermehrungen, wie wir sie gerade betrachtet haben, werden als exponentielles Wachstum bezeichnet.
Eine Funktion, die solch einen Vorgang beschreibt, nennt man Exponentialfunktion.

Übungsaufgabe

Wie müsste die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion unter folgenden Bedingungen aussehen:

a) Alle 15 min verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien

b) Alle 30 min verdreifacht sich die Anzahl der Bakterien.

c) Wir beginnen mit der Beobachtung, wenn schon n_0 = 1000 000 000 Bakterien vorhanden sind und die Anzahl sich alle 45 min verfünffacht.

d) Bei Beobachtungsbeginn sind n_0 = 100 000 Bakterien vorhanden und alle 45 min nimmt die Anzahl der Bakterien um den Faktor e = 2,718 zu.

e) Alle 10 min. halbiert sich die Anzahl n_0.

a) $f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$ b) $f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$

c) $f(x) = 1000\,000\,000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$

d) $f(x) = 100\,000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x}$ mit $e = 2{,}718$

e) Es handelt sich um eine Abnahme $=$ negatives Wachstum $f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$

<u>Merke:</u>

Funktionen, die Wachstumsprozesse beschreiben, heißen Exponentialfunktionen.
Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$ mit $n_0 =$ Anzahl zur Zeit $t = 0$; $a \in \mathbb{R}^+$; k , $x \in \mathbb{R}$

Exponentielles Wachstum oder exponentielle Abnahme kann man in vielen Lebensbereichen beobachten:
In der Biologie (Zunahme und Abnahme von Bakterien),
in der Ökologie (Populationen von Tieren),
in der Wirtschaftslehre (Kapitalzuwachs durch Zinseszins),
bei physikalisch – technischen Problemen (Zerfall radioaktiver Substanzen),
in der Medizin (Wirkung von Medikamenten).

Spezielle Beispiele zur e – Funktion

Exponentielles Wachstum:

Der Bestand von Bakterien vermehrt sich nach einer e – Funktion.

$f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ $\quad n_0 = \text{Anfangswert} \quad t = \text{Zeit in Stunden}$

Auf welchen Wert wächst der Bestand von n_0 = 2000 Bakterien in 4 Stunden.
Nach wie viel Stunden sind es 10 000 Bakterien?
Wie sieht der Funktionsgraph aus?

Bestand nach 4 Stunden:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

Nach wie viel Stunden sind es 10 000 Bakterien?

Ansatz:

$$f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t} = 10\,000$$

Um den Exponenten t zu bestimmen, ist die Exponentialgleichung

$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t} = 10\,000$ zu lösen.

Das geschieht durch logarithmieren. Dazu müssen folgende Logarithmengesetze angewendet werden:

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ und $\ln e^x = x$

Lösung der Exponentialgleichung:

$$\ln\left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}\right) = \ln 10\,000$$

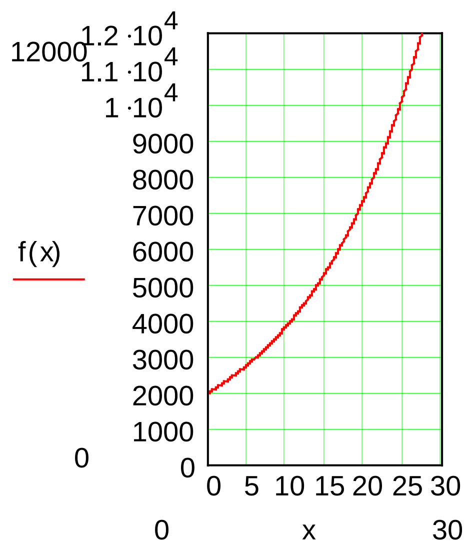
$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \mid -\ln 2\,000$$

$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \mid \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 24{,}54$$

Nach etwa $\underline{\underline{\text{24,5 Stunden}}}$

sind es 10 000 Bakterien.



Exponentielle Abnahme:

Radioaktive Stoffe zerfallen in gleichen Zeitspannen jeweils mit demselben Faktor. Ihre Halbwertszeit gibt an, nach welcher Zeit nur noch die Hälfte der ursprünglichen Aktivität vorhanden ist. Die Aktivität A(x) wird gemessen in Megabecquerel (1 MBq = 10^6 Zerfälle pro Sekunde). Für medizinische Untersuchungen wird Jod 131 mit einer Halbwertszeit (t_h) von 8 Tagen verwendet. Dabei werden dem Patienten A_0 = 4000 MBq verabreicht. Nach wie viel Halbwertzeiten bzw. Tagen beträgt die Restaktivität im Körper höchstens noch 400 MBq?
Zeichnen Sie den Graphen, lesen Sie die ungefähre Zeit ab und berechnen Sie den genauen Wert.

radioaktives Zerfallsgesetz: $A(x) = A_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$ dabei bedeuten:

A_0 = Anfangsaktivität in MBq ; t_h = Halbwertszeit in Tagen ; t = Zeit in Tagen

Funktionsgleichung:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$$

$$= 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}$$

Lösungsansatz:

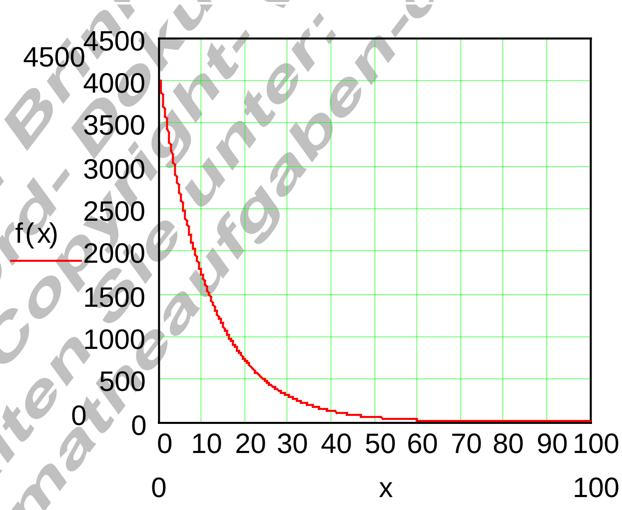
$$A(t) = 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t} = 400$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}\right) = \ln 400$$

$$\Leftrightarrow \ln 4000 - \frac{\ln 2}{8} \cdot t = \ln 400$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}(\ln 4000 - \ln 400)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2} \cdot \ln 10 \approx \underline{\underline{26,575}}$$

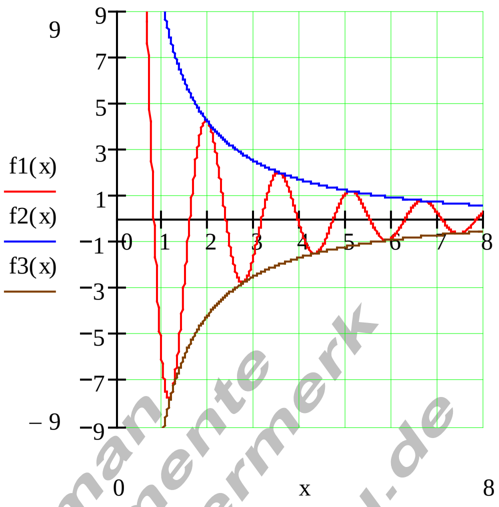


Nach etwa 27 Tagen, etwas mehr als nach 3 Halbwertszeiten beträgt die Restaktivität im Körper noch etwa 400 MBq.

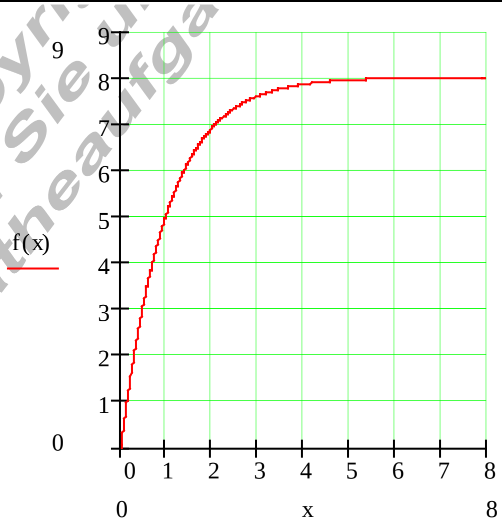
Eine besondere Exponentialfunktion, die in der Technik von großer Bedeutung ist, ist die ***Exponentialfunktion zur Basis e***, die ***e – Funktion***.
Die ***Eulersche Zahl e*** heißt auch natürliche
Zahl, sie ist eine irrationale Zahl.

Mit Hilfe der Zahl e lassen sich natürliche Wachstumsvorgänge mathematisch beschreiben.

Auch in der Schwingungslehre benötigt man
Funktionen, die die natürliche Zahl beinhalten.
Nebenstehend eine nach der e – Funktion
abklingende gedämpfte Schwingung.



Nebenstehend die Ladekurve eines Kondensators.



Die Zahl e, der natürliche Logarithmus und die e – Funktion

$e = 2{,}718\,281828....$ $\qquad e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$

$e^{\ln b} = b$ $\qquad$ z.B. $e^{\ln(x-1)} = x - 1$

$\ln e^x = x$ $\qquad$ z.B. $\ln e^{-\frac{1}{k}\cdot x} = -\frac{1}{k}\cdot x$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

Die Graphen verlaufen von II nach I

Ist der Exponent positiv, so ist der Graph monoton steigend.

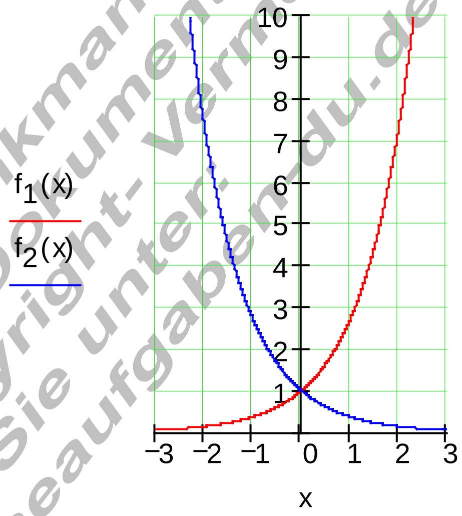
Ist der Exponent negativ, so ist der Graph monoton fallend.

Es gibt keine Nullstellen.

Für große x – Beträge nähert sich der Graph immer mehr der x – Achse.

Alle Graphen verlaufen durch den Punkt P (0 | 1).

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$



Jede Exponentialfunktion kann durch die e – Funktion beschrieben werden.
Mit $f(x) = a^x$ und $a = e^{\ln a}$ gilt:

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x} = e^{x\cdot \ln a}$$

Aus diesem Grund wird in den folgenden Kapiteln als Exponentialfunktion nur noch die e- Funktion betrachtet.