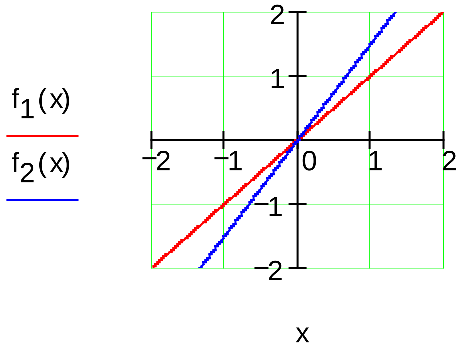
Potenzfunktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$
heißt Potenzfunktion.
Der Exponent n bestimmt den Grad der Potenzfunktion und
der Faktor a_n die Form des Graphen, er heißt Formfaktor.

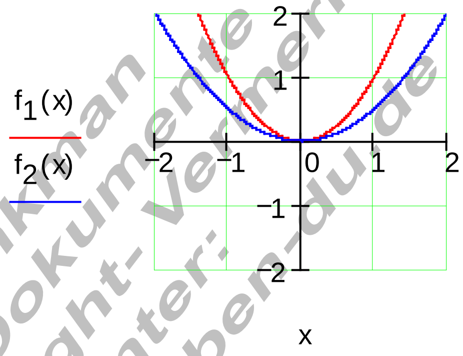
Beispiele:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



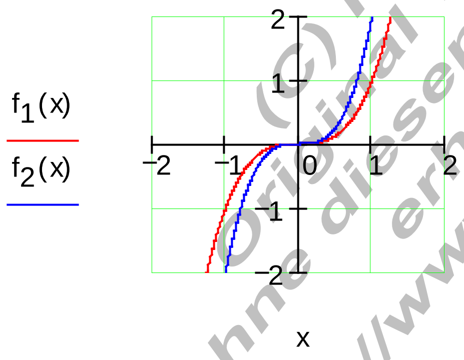
Potenzfunktion 1. Grades (Gerade)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$



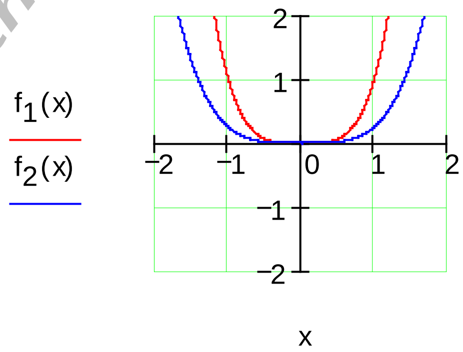
Potenzfunktion 2. Grades (Parabel)

$f_1(x) := x^3 \qquad f_2(x) := 2 \cdot x^3$

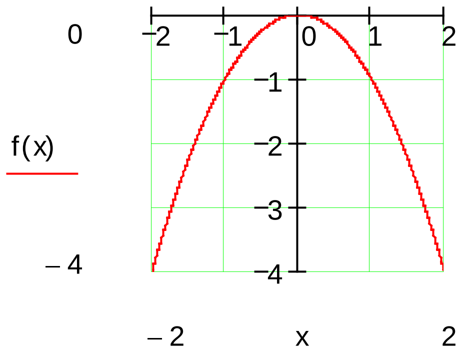


Potenzfunktion 3. Grades

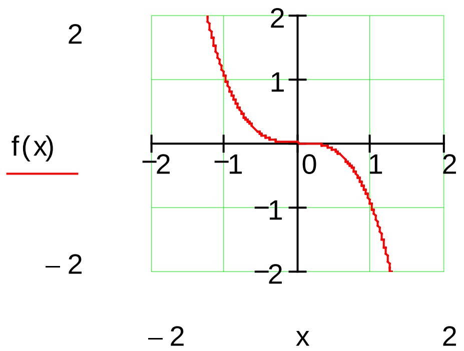
$f_1(x) := x^4 \qquad f_2(x) := \frac{1}{4} \cdot x^4$



Potenzfunktion 4. Grades



Wie lautet die Funktionsgleichung?



Wie lautet die Funktionsgleichung?

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Welche gemeinsamen Punkte haben die Graphen?
b) Welchen Einfluss hat der Grad n und das Vorzeichen von a_n auf den Verlauf des Graphen?
c) Welchen Einfluss hat der Grad n der Potenzfunktion auf die Symmetrie des Graphen?
d) Welche Wertemengen in Abhängigkeit von n und dem Vorzeichen von a_n haben Potenzfunktionen?
e) Welchen Einfluss hat der Betrag von a_n auf den Verlauf der Graphen?

zu a) Alle Graphen verlaufen durch die Punkte (0 | 0)

zu b) n gerade und $a_n > 0$: Der Graph verläuft vom II. zum I. Quadranten.
n gerade und $a_n < 0$: Der Graph verläuft vom III. zum IV. Quadranten

n ungerade und $a_n > 0$: Der Graph verläuft vom III. zum I. Quadranten
n ungerade und $a_n < 0$: Der Graph verläuft vom II. zum IV. Quadranten

zu c) n gerade: Der Graph ist symmetrisch zur y- Achse (Achsensymmetrie)
n ungerade: Der Graph ist symmetrisch zum Koordinatenursprung (Punktsymmetrie)

zu d) n gerade und $a_n > 0$: $f(x) \geq 0$
Es gibt nur positive Funktionswerte einschließlich der Null.
n gerade und $a_n < 0$: $f(x) \leq 0$
Es gibt nur negative Funktionswerte einschließlich der Null.

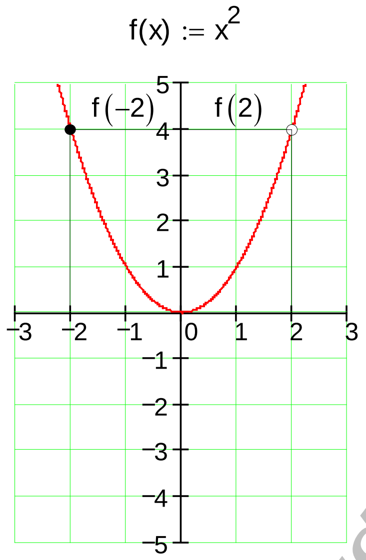
n ungerade und $a_n > 0$: Wertemenge W = IR
n ungerade und $a_n < 0$: Wertemenge W = IR

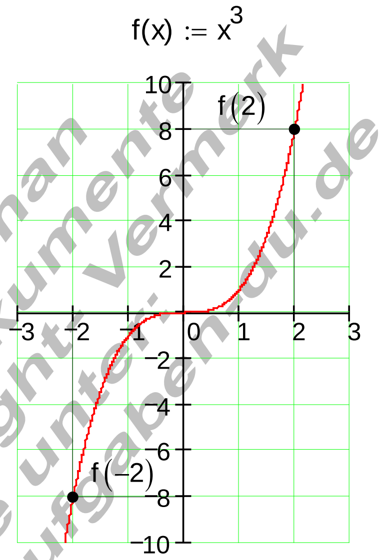
zu e) Der Faktor a_n bestimmt die jeweilige Form des Graphen (gestreckt oder gestaucht), deshalb wird er auch Formfaktor genannt.
Eine Vorzeichenänderung bewirkt die Spiegelung an der x – Achse.

Symmetrien:

Wie lässt sich die Symmetrie beurteilen, wenn man nur die Funktionsgleichung einer Potenzfunktion kennt?

Dazu zeichnen wir die Graphen folgender Funktionen
$f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$
und betrachten die Funktionswerte an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$





Die Vermutung liegt nahe das folgendes gilt:

Für gerade Exponenten von x sind die Funktionswerte gleich. Das bedeutet :
Achsensymmetrie, also $f(-x) = f(x)$ z. B. $f(-2) = f(2) = 4$ bei $f(x) = x^2$

Für ungerade Exponenten von x haben die Funktionswerte den gleichen Betrag aber entgegengesetztes Vorzeichen. Das bedeutet:
Punktsymmetrie, also $f(-x) = -f(x)$ z. B. $f(-2) = -f(2) = -8$ bei $f(x) = x^3$

Dieser Zusammenhang gilt für alle Potenzfunktionen (hier ohne Beweis).

Der Graph einer Potenzfunktion $f(x)$ ist achsensymmetrisch,
wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = f(x)$
Der Graph einer Potenzfunktion f(x) ist punktsymmetrisch,
wenn für alle $x \in D$ gilt $f(-x) = -f(x)$

Zusammenfassung:

Für $a_n > 0$ gilt:

Alle Potenzfunktionen mit geraden Exponenten sind achsensymmetrisch.
Sie verlaufen vom II. in den I. Quadranten.

Alle Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch.
Sie verlaufen vom III. in den I. Quadranten.

Für $a_n < 0$ gilt:

Alle Potenzfunktionen mit geraden Exponenten sind achsensymmetrisch.
Sie verlaufen vom III. in den IV. Quadranten.

Alle Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten sind punktsymmetrisch.
Sie verlaufen vom II. in den IV. Quadranten.

Training GRF_01:
Bestimmen Sie den **Grad** folgender Potenzfunktionen, machen Sie eine Aussage über das **Symmetrieverhalten**, den **Verlauf des Graphen** und die **Wertemenge**.
Zeichnen Sie die Graphen jeweils in ein Koordinatensystem.

1.)	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$	2.)	$f(x) = \frac{1}{4}x$
3.)	$f(x) = -\frac{1}{10}x^4$	4.)	$f(x) = \frac{1}{5}x^3$
5.)	$f(x) = -\frac{1}{10}x^5$	6.)	$f(x) = -\frac{1}{2}x$
7.)	$f(x) = -\frac{1}{10}x^3$	8.)	$f(x) = 2x^2$
9.)	$f(x) = \frac{1}{5}x^4$	10.)	$f(x) = -\frac{2}{5}x^4$