Lineare Funktionen aus gegebenen Bedingungen

Fall I: Eine Gerade mit der Steigung a_1 verläuft durch den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$.
Gesucht ist die Funktionsgleichung.

Beispiel

Steigung: $a_1 = 1{,}5$ Punkt: $P_1(-2 \mid 3)$

Ausgangsgleichung: $f(x) = a_1 x + a_0$

Steigung einsetzen: $f(x) = 1{,}5 \cdot x + a_0$

Der Wert für a_0 ist zu berechnen.

Punktprobe für: $P_1(-2 \mid 3)$

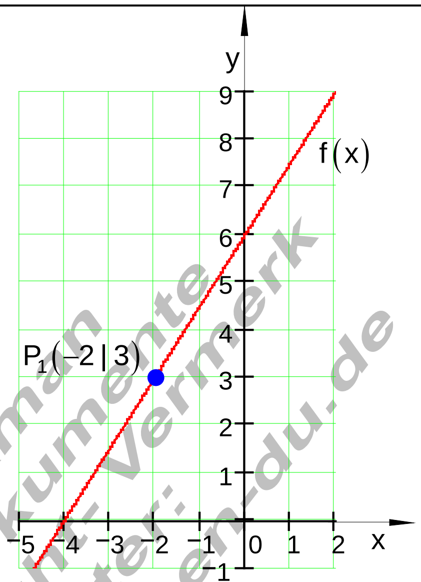
$$
\begin{aligned}
f(-2) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 1{,}5 \cdot (-2) + a_0 = 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -3 + a_0 = 3 \mid +3 \\
&\Leftrightarrow \quad a_0 = 6
\end{aligned}
$$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = 1{,}5 \cdot x + 6}}$

Probe:

$P_1(-2 \mid 3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1{,}5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$



Beispiel

Zur Versorgung der Futterautomaten im Zoo „Koalabär“ benötigt der Tierpfleger täglich 7,5 kg Tierfutter. Zwölf Tage, nachdem das Futterlager zum letzten Mal aufgefüllt wurde, befinden sich dort noch 250 kg.

a)	Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.
b)	Auf welche Menge wurde das Futterlager vor zwölf Tagen aufgefüllt?

Lösung

a) x- Achse: Zeit in Tagen y- Achse: Futterbestand in kg

$f(x) = -7{,}5x + a_0$

$$
\begin{aligned}
P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 &\Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250 \\
&\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90 \\
&\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}
\end{aligned}
$$

b) Der Auffüllzeitpunkt liegt bei x = 0.

$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$

Der Futterbestand wurde vor 12 Tagen auf 340 kg aufgefüllt.

Wenn wie im Fall I die Steigung und ein Punkt einer Geraden bekannt ist, erfolgt die Rechnung immer in der gleichen Weise mit den vorgegebenen Daten.
In einem solchen Fall kann man die Rechnung allgemein durchgeführt werden.
Das führt dann zu einer Formel.

Eine Gerade mit der Steigung a_1 verläuft durch den Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$.
Die Allgemeine Form der Geradengleichung lautet: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

heißt auch **Punkt- Steigungsform** der Geradengleichung.

Beispiel
$a_1 = -2;\ P_1(-3 \mid 4)$ eingesetzt in $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$:
$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$

Fall II: Zwei Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ liegen auf einer Geraden.
Gesucht ist die Funktionsgleichung.

Beispiel

$P_1(-3 \mid -1)$ $\qquad$ $P_2(4 \mid 6)$

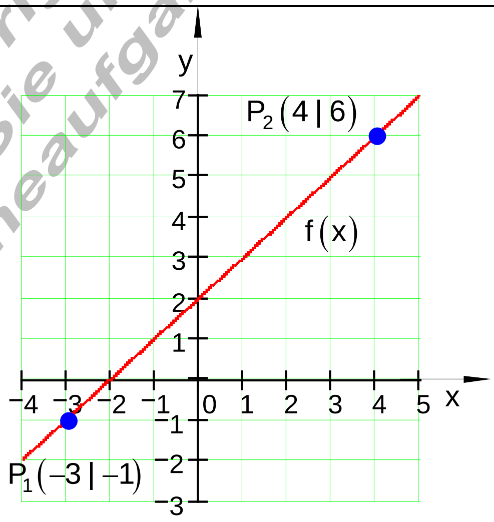
Ausgangsgleichung: $\quad f(x) = a_1x + a_0$

Bestimmung der Steigung:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

Steigung einsetzen: $\quad f(x) = 1 \cdot x + a_0$

Nachdem die Steigung bekannt ist, wird die Aufgabe gelöst wie unter Fall I beschrieben.
Für die Punktprobe ist es egal, welcher Punkt dazu verwendet wird, denn beide Punkte sollen ja auf der Geraden liegen.



Punktprobe für: $P_2(4 \mid 6)$ oder für P_1

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

Beispiel
Wie aus dem Physikunterricht bekannt, gibt es unterschiedliche Temperaturskalen. Die Celsiusskala soll in die Fahrenheitskala umgerechnet werden. Zwischen beiden besteht eine lineare Beziehung. 100 ^{0}C entsprechen 212 ^{0}F, 0 ^{0}C entsprechen 32 ^{0}F. Gesucht ist eine Funktionsgleichung, für die Umrechnung von ^{0}C in ^{0}F. Unabhängige Variable x in ^{0}C, abhängige Variable y = f(x) in ^{0}F.

$0\,^0C \triangleq 32\,^0F \Rightarrow P_1(0\,|\,32) \quad 100\,^0C \triangleq 212\,^0F \Rightarrow P_2(100\,|\,212) \quad f(x) = a_1x + a_0$

$\text{Steigung}: a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$

$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$

$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ Umrechnungsfunktion x in ^0C einsetzen Ergebnis ist ^0F

z. B. $x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$

Auch für Fall II kann die Rechnung allgemein durchgeführt werden:

Zwei Punkte $P_1(x_1\,|\,y_1)$ und $P_2(x_2\,|\,y_2)$ liegen auf einer Geraden.
Die Allgemeine Form der Geradengleichung lautet: $f(x) = a_1x + a_0$

Steigung: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$

$P_1(x_x\,|\,y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 = y_1 \left| -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \right. \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

ist die allgemeine Form der Geradengleichung durch zwei Punkte.

In der Literatur erscheint sie in der Form:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x_1 \neq x_2$ wobei $y = f(x)$ gilt.

Für den praktischen Gebrauch eignet sich die Form:

$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

Beispiel

$P_1(2\,|\,-1)\,;\,P_2(-3\,|\,2)$ eingesetzt in $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$:

$f(x) = \frac{2 - (-1)}{-3 - 2}(x - 2) + (-1) = \frac{2 + 1}{-5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} - \frac{5}{5}$

$= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

U1	Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Umrechnung von ^{0}F in ^{0}C auf.

Die Umrechnung von ^{0}C in ^{0}F bedeutet für die Variablen:
x in ^{0}F ist die unabhängige Variable und y = f(x) in ^{0}C ist die abhängige Variable.

$32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$ und $212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100)$

Da zwischen den Temperaturskalen eine lineare Beziehung besteht, liegen die Punkte P_1 und P_2 auf einer Geraden.
Die allgemeine Form der Geradengleichung lautet: $f(x) = a_1x + a_0$
Zu bestimmen sind die Koeffizienten a_1 und a_0.

Steigung: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$

Punktprobe mit $P_1(32\,|\,0)$

$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$

Für die Umrechnung von ^{0}F in ^{0}C gilt: $f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$ x in ^{0}F und $f(x)$ in ^{0}C

Training :LINFKT_02

Eine Gerade hat die Steigung a_1 und verläuft durch den Punkt P.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x), die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.

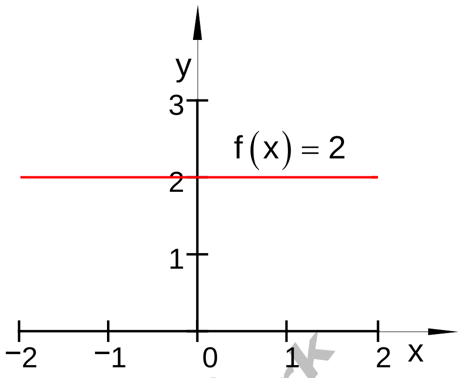
1.)	$a_1 = \frac{1}{2}$	$P(2\,|\,-2)$	2.)	$a_1 = \frac{3}{4}$	$P(-1\,|\,3)$
3.)	$a_1 = 2$	$P(3\,|\,-1)$	4.)	$a_1 = \frac{4}{5}$	$P\left(\frac{3}{2}\,|\,4\right)$

Eine Gerade verläuft durch die Punkte P_1 und P_2.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x), die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.

5.)	$P_1(2\,|\,1)$	$P_2(5\,|\,4)$	6.)	$P_1(-3\,|\,-2)$	$P_2(2\,|\,3)$
7.)	$P_1(-2\,|\,3)$	$P_2(4\,|\,-1)$	8.)	$P_1(-4\,|\,-1)$	$P_2(3\,|\,1)$
9.)	$P_1\left(-3\,|\,\frac{9}{2}\right)$	$P_2(4\,|\,-1)$	10.)	$P_1(-4\,|\,-2)$	$P_2\left(\frac{7}{2}\,|\,4\right)$

Sonderfälle von Geradengleichungen

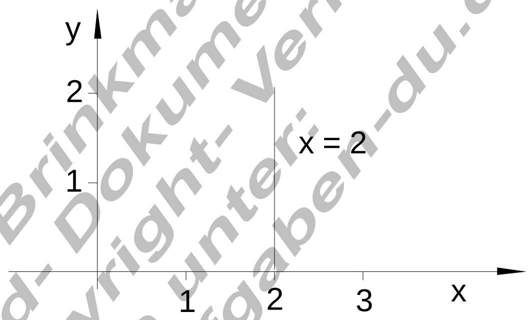
Parallele zur x- Achse:
$f(x) = a_0\ ;\ a_0 \in \mathbb{R}$
ist eine ganzrationale Funktion 0. Grades und wird auch als konstante Funktion bezeichnet.



Die x- Achse ist ebenfalls eine konstante Funktion mit der Funktionsgleichung f(x) = 0

Die Steigung einer Konstanten Funktion ist stets Null.

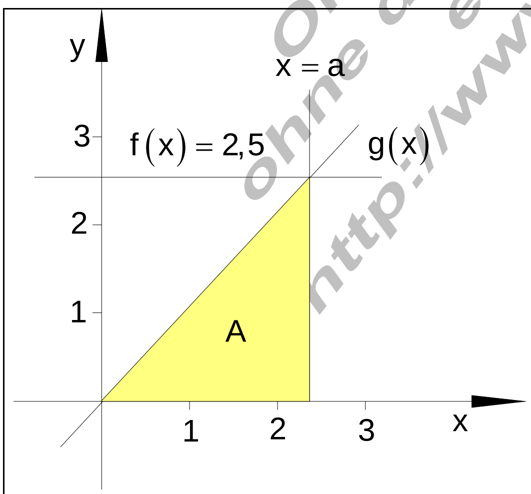
Parallele zur y- Achse:
$x = a\ ;\ a \in \mathbb{R}$
Die Gerade verläuft parallel zur y- Achse.
Sie kann nicht durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden, da es keine eindeutige Zuordnung gibt.



x = 0 ist die Gleichung der y- Achse.

Beispiel

Gegeben ist f(x) = 2,5 und eine Parallele zur y- Achse im Abstand a mit a > 0.
Eine Ursprungsgerade g geht durch den Punkt P(a | f(x)). Sie bildet mit der x- Achse und der Parallelen zur y- Achse ein Dreieck.
Bestimmen Sie a so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks 4 Flächeneinheiten (FE) beträgt. Wie lautet für diesen Fall die Funktionsgleichung g(x)?



$A = \frac{g \cdot h}{2}$ mit $g = a$ und $h = f(x) = 2,5$

$\Rightarrow A = \frac{2,5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$ Dreiecksfläche

$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \mid \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$

$g(x) = a_1 x$ ($a_0 = 0$ da Ursprungsgerade)

Aus dem Steigungsdreieck: $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

Funktionsgleichung: $g(x) = \frac{25}{32}x$