Zinseszinsrechnung

In der Zinseszinsrechnung beschäftigt man sich mit der Entwicklung von einmalig angelegten Kapitalbeträgen zu einem Zinssatz, der in der Regel im Zeitablauf fest bleibt. Zinseszinsen lassen sich anhand einer mathematischen Formel berechnen, in die neben dem Anlagebetrag der jeweilige Zinssatz, der Anlagezeitraum und der Zinsturnus- sprich die Anzahl der Zinsgutschriften pro Jahr- einfließen. Ganz ohne einen Taschenrechner wird man also nicht auskommen, wenn man sich ein Bild davon machen möchte, wie sich das Guthaben im Laufe der Zeit entwickelt bzw. entwickeln kann.

Einführungsbeispiel:
Ein Immobilienmakler legt am Ende eines Jahres sein Weihnachtsgeld in Höhe von 4000 € auf ein Sparbuch mit 4- jähriger Kündigungsfrist. Das Kreditinstitut vereinbart mit ihm einen Zinssatz von 5%.
Wie entwickelt sich das Sparguthaben?

Das Anfangskapital beträgt K(0) = 4000. Am Ende des 1. Jahres hat sich das Kapital um die Zinsen des 1. Jahres erhöht.	$K(0)=4000$ Anfangskapital $K(1)=K(0)+K(0)\cdot 0,05$ $K(1)=4000+4000\cdot 0,05$ $K(1)=4000\cdot(1+0,05)=4000\cdot 1,05$
Am Ende des 2. Jahres werden zu dem Kapital K(1) die Jahreszinsen des 2. Jahres addiert.	$K(2)=K(1)+K(1)\cdot 0,05$ $K(2)=4000\cdot 1,05+4000\cdot 1,05\cdot 0,05$ $K(2)=4000\cdot 1,05\cdot(1+0,05)=4000\cdot 1,05\cdot 1,05$ $K(2)=4000\cdot 1,05^2$
Am Ende des 3. Jahres werden wieder die Zinsen von 5 % zu K(2) addiert.	$K(3)=K(2)+K(2)\cdot 0,05$ $K(3)=4000\cdot 1,05^2+4000\cdot 1,05^2\cdot 0,05$ $K(3)=4000\cdot 1,05^2\cdot(1+0,05)=4000\cdot 1,05^2\cdot 1,05$ $K(3)=4000\cdot 1,05^3$
Das endgültige Guthaben am Ende des 4. Jahres ergibt sich aus der Summe von K(3) und den Zinsen von K(3). Der Makler kann nach 4 Jahren über einen Betrag von 4862,03 € verfügen.	$K(4)=K(3)+K(3)\cdot 0,05$ $K(4)=4000\cdot 1,05^3+4000\cdot 1,05^3\cdot 0,05$ $K(4)=4000\cdot 1,05^3\cdot(1+0,05)=4000\cdot 1,05^3\cdot 1,05$ $K(4)=4000\cdot 1,05^4=\underline{\underline{4862,03}}$
Nach n Jahren beträgt das Kapital somit:	$K(n)=K(0)\cdot 1,05^n$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Die Zinseszinsformel:

$K(0)$: Anfangskapital $K(n)$: Guthaben nach n Jahren p : Zinssatz in % $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$: Zinsfaktor	Das Anfangskapital K(0) wächst in n- Jahren bei einer Verzinsung von p% auf das Endkapital K(n) an. $K(n) = K(0) \cdot q^n$ mit $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Beispiel 1

Das Guthaben nach n Jahren wird berechnet. Anfangskapital: K(0) = 10000 € Zinssatz : p = 6,5% Laufzeit : n = 18 Jahre gesucht : Guthaben nach 18 Jahren	$K(n) = K(0) \cdot q^n \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6,5}{100} = 1{,}065$ $K(18) = 10000 \cdot 1{,}065^{18} = \underline{\underline{31066{,}54}}$ Nach 18 Jahren beträgt das Guthaben: 31066,54 € .

Beispiel 2

Das Anfangskapital wird berechnet.
Für einen Autokauf sollen in 5 Jahren 20000 € zur Verfügung stehen.
Welchen Betrag müsste man dafür jetzt zu 7% anlegen?
Vorüberlegung: Die Formel

$$K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

muss nach dem Anfangskapital K(0) umgestellt werden.

Formelumstellung: $K(n) = K(0) \cdot q^n \quad \vert : q^n$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{K(n)}{q^n} = K(0)}}$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$	Berechnung: $K(0) = \frac{K(n)}{q^n}$ $n = 5 \quad K(5) = 20000 \quad q = 1 + \frac{7}{100} = 1{,}07$ $K(0) = \frac{20000}{1{,}07^5} = 14259{,}72$ Antwort: Es muss ein Betrag von 14259,72 € für 5 Jahre zu 7% angelegt werden.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter
http://www.brinkmann-du.de

Beispiel 3

Der Zinssatz wird berechnet.
Zu welchem Zinssatz müssen 3325,29 € für 7 Jahre angelegt werden, damit am Ende des 7. Jahres 5000 € zur Verfügung stehen?
Vorüberlegung: Die Formel

$$K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

muss nach dem Zinssatz p umgestellt werden.

Formelumstellung:

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad |: K(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(n)}{K(0)} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad | \sqrt[n]{}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} = 1 + \frac{p}{100} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1 = \frac{p}{100} \quad | \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1\right) = p$$

Berechnung:

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1\right)$$

$$n = 7 \quad K(0) = 3325{,}29 \quad K(7) = 5000$$

$$\Leftrightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[7]{\frac{5000}{3325{,}29}} - 1\right) = 6\%$$

Antwort:
Damit nach 7 Jahren aus dem Anfangskapital 5000 € werden, muss der Zinssatz p = 6% betragen.

Beispiel 4

Die Laufzeit wird berechnet.
Wie lange müssen 6808,24 € zu 6,5% angelegt werden, bis sie auf 12000 € gewachsen sind?
Vorüberlegung: Die Formel

$$K(n) = K(0) \cdot q^n = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

muss nach der Laufzeit n umgestellt werden.

Formelumstellung:

$$K(n) = K(0) \cdot q^n \quad |: K(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(n)}{K(0)} = q^n \quad | \text{ logarithmieren}$$

$$\Leftrightarrow \lg \frac{K(n)}{K(0)} = \lg q^n = n \cdot \lg q \quad | \lg q$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q} = n$$

Berechnung:

$$n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q}$$

$$K(0) = 6808{,}24 \quad K(n) = 12000 \quad q = 1 + \frac{6{,}5}{100} = 1{,}065$$

$$n = \frac{\lg \frac{12000}{6808{,}24}}{\lg 1{,}065} = 9$$

Antwort:
Um auf 12000 € anzuwachsen müssen 6808,24 € zu 6,5% 9 Jahre angelegt werden.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter http://www.brinkmann-du.de

Zusammenfassung:

K(n) ist das n Jahre lang zu einem Zinssatz von p% verzinste Anfangskapital K(0) und lässt sich nach der Zinseszinsformel

$\boxed{K(n) = K(0) \cdot q^n}$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$

berechnen.

Durch entsprechende Formelumstellungen lässt sich auch das Anfangskapital, die Laufzeit und der Zinssatz berechnen.

Anfangskapital: $\boxed{K(0) = \frac{K(n)}{q^n}}$ Laufzeit: $\boxed{n = \frac{\lg \frac{K(n)}{K(0)}}{\lg q}}$ Zinssatz: $\boxed{p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K(n)}{K(0)}} - 1 \right)}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de