Quadratische Gleichungen

Reinquadratische Gleichung

Lösen Sie die Gleichung $x^2 = 25$
Durch probieren erhält man die Lösung: $x_1 = 5$ oder $x_2 = -5$
Denn $(x_1)^2 = 5^2 = 25$ oder $(x_2)^2 = (-5)^2 = 25$

Die gleiche Lösung erhält man durch Äquivalenzumformung:

$x^2 = 25 \mid \sqrt{}$ auf beiden Seiten die Wurzel ziehen

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25}$

$\Leftrightarrow |x| = 5$ Betrag auflösen

Fall 1: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x = 5 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$

Fall 2: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x = 5 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -5}}$

Erläuterungen zum Betrag

Jemand gewinnt 120 €, wir sagen auch er gewinnt einen Geldbetrag von 120 €.
Jemand bekommt einen Strafzettel über 120 €, wir sagen auch er hat einen Geldbetrag von 120 € zu zahlen.
Finanztechnisch bedeutet der Gewinn ein Plus und die Strafe ein Minus.

Also: Gewinn $+120$ € Strafzettel -120 €

In beiden Fällen handelt es sich um 120 €.

Der Betrag einer reellen Zahl ergibt sich, wenn das Vorzeichen auf + gewandelt wird.

Beispiele:

$\lvert 4 \rvert = 4$	$\lvert 5{,}12 \rvert = 5{,}12$	$\lvert \sqrt{3} \rvert = \sqrt{3}$	$\lvert \pi \rvert = \pi$
$\lvert -4 \rvert = 4$	$\lvert -5{,}12 \rvert = 5{,}12$	$\lvert -\sqrt{3} \rvert = \sqrt{3}$	$\lvert -\pi \rvert = \pi$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Nicht ganz so einfach ist es, wenn wir den Betrag einer Variablen x bestimmen wollen.

| x | = x gilt leider nicht für alle reellen Zahlen.

Zum Beispiel:

$$x = 5 \quad \Rightarrow |x| = x \text{ denn } |5| \quad = \quad 5 \text{ ist wahr}$$
$$x = -5 \Rightarrow |x| = x \text{ denn } \underbrace{|-5|}_{5} = -5 \text{ ist falsch}$$

Die Vermutung $|x| = x$ ist also nur richtig, wenn $x \geq 0$ ist.
Für $x < 0$ ist sie falsch.
Wir müssen bei der Betragsbestimmung von Variablen also zwei Fälle unterscheiden:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \quad (\text{Fall } 1) \\ -x & \text{falls } x < 0 \quad (\text{Fall } 2) \end{cases}$$

Beispiel: $x = 5 \quad$ da $x > 0$ ist gilt $|x| = x$ denn $|5| = 5$
$x = -5 \quad$ da $x < 0$ ist gilt $|x| = -x$ denn $|-5| = -(-5) = 5$

Der Betrag einer reellen Zahl ist immer positiv.
Der Betrag gibt die Größe einer Zahl an, ohne dabei auf das Vorzeichen zu achten.

<u>Lösungsvariante I</u>

Gleichungen der Form $\boxed{ax^2 = b}$ oder $\boxed{ax^2 + c = 0}$ heißen reinquadratische Gleichungen.
Sie werden nach entsprechenden Umformungen durch radizieren (wurzelziehen) gelöst.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 8 && = 0 && \mid +8 \\ \Leftrightarrow \; & 2x^2 && = 8 && \mid :2 \\ \Leftrightarrow \; & x^2 && = 4 && \mid \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \; & \sqrt{x^2} && = \sqrt{4} && \\ \Leftrightarrow \; & |x| && = 2 && \end{aligned}$$

Fall 1: $x \geq 0 : |x| = x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$

Fall 2: $x < 0 : |x| = -x = 2 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
 & \frac{1}{2}x^2 & = & 9 \quad |\cdot 2 \\
\Leftrightarrow & x^2 & = & 18 \quad |\sqrt{} \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x^2} & = & \sqrt{18} \quad | \\
\Leftrightarrow & |x| & = & \sqrt{18}
\end{array}
$$

Fall 1: $x \geq 0 : |x| = x = \sqrt{18} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \sqrt{18}}}$

Fall 2: $x < 0 : |x| = -x = \sqrt{18} \Leftrightarrow x = -\sqrt{18} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\sqrt{18}}}$

<u>Lösungsvariante II</u>

Lösen Sie die Gleichung $x^2 + 2x = 0$
Durch probieren erhält man die Lösung: $x_1 = 0$ oder $x_2 = -2$
Denn $x_1^2 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$ oder $x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$

Die gleiche Lösung erhält man durch ausklammern:

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x(x+2)}_{\text{Produkt}} = 0$$

Es gibt 2 Möglichkeiten, damit das Produkt Null wird:

Fall 1: $x = 0 \Rightarrow 0 \cdot (0+2) = 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$

Fall 2: $(x+2) = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$ das bedeutet: $(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

<u>Satz vom Nullprodukt:</u>
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Eine quadratische Gleichung der Form $\boxed{ax^2 + bx = 0}$ oder $\boxed{ax^2 = cx}$ lässt sich immer durch ausklammern der Variablen x lösen.

Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
 & 3x^2 + 2x & = & 0 \quad |\,x \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow & x(3x+2) & = & 0 \quad |\,\text{Nullprodukt} \\
\text{Fall 1:} & x & = & 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
\text{Fall 2:} & 3x + 2 & = & 0 \quad |-2 \\
\Leftrightarrow & 3x & = & -2 \quad |:3 \\
\Leftrightarrow & x & = & -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\frac{2}{3}}}
\end{array}
$$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{2}{3}x^2 &= \frac{3}{4}x && \left| -\frac{3}{4}x \right. \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x &= 0 && |\ x \text{ ausklammern} \\
&\Leftrightarrow & x\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right) &= 0 && |\ \text{Nullprodukt} \\
&\text{Fall 1:} & x &= 0 && \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
&\text{Fall 2:} & \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} &= 0 && \left| +\frac{3}{4} \right. \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{3}x &= \frac{3}{4} && \left| \cdot\frac{3}{2} \right. \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{9}{8} && \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{9}{8}}}
\end{aligned}
$$

Probe: mit $x = \frac{9}{8}$

$$
\begin{aligned}
& & \frac{2}{3}x^2 &= \frac{3}{4}x \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 &= \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8} \\
&\Leftrightarrow & \frac{2}{3}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 8} &= \frac{3\cdot 9}{4\cdot 8} \\
&\Leftrightarrow & \frac{27}{32} &= \frac{27}{32}
\end{aligned}
$$

<u>Allgemeine Form der quadratischen Gleichung</u>

Die <u>allgemeine Form</u> der quadratischen Gleichung lautet: $ax^2 + bx + c = 0$

Beispiele: $2x^2 - 3x + 4 = 0$; $-x^2 + x - 5 = 0$; $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 8 = 0$

Für praktische Berechnungen empfiehlt es sich, diese Darstellung zu vereinfachen. Dazu dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch a und erhalten die **Normalform** der quadratischen Gleichung.

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{q} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0 \ \underline{\text{(Normalform)}}$$

(C) Rolf Brinkmann
Original-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten unter:
http://www.brinkmann-du.de

Lösungsverfahren mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
 & 2x^2-16x-40 & = & 0 & |:2 \quad \text{auf die Normalform bringen} \\
\Leftrightarrow & x^2-8x-20 & = & 0 & | \text{ quadratische Ergänzung durchführen} \\
\Leftrightarrow & \underbrace{x^2-8x+4^2}_{\text{2. binomische Formel}}-4^2-20 & = & 0 & |+4^2+20 \\
\Leftrightarrow & (x-4)^2 & = & 36 & |\sqrt{} \\
\Leftrightarrow & |x-4| & = & 6 & \\
\text{Fall 1:} & (x-4)\geq 0 \Rightarrow x-4 & = & 6 & |+4 \\
\Leftrightarrow & x & = & 10 & \Rightarrow \underline{\underline{x_1=10}} \\
\text{Fall 2:} & (x-4)<0 \Rightarrow -(x-4) & = & 6 & |\cdot(-1) \\
\Leftrightarrow & x-4 & = & -6 & |+4 \\
\Leftrightarrow & x & = & -2 & \Rightarrow \underline{\underline{x_2=-2}}
\end{array}
$$

Jede quadratische Gleichung lässt sich mit der Methode der quadratischen Ergänzung lösen.

Bemerkung zur Ergänzung der Quadrates:
Der Koeffizient von x wird halbiert, quadriert, addiert und wieder subtrahiert.
Unter Verwendung der 1. oder 2. binomischen Formel wird dann das Quadrat gebildet.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Die p – q – Formel.

Wendet man auf die Normalform der quadratischen Gleichung das Verfahren der quadratischen Ergänzung an, so gelangt man zu der sogenannten p – q – Formel, mit der sich quadratische Gleichungen noch einfacher lösen lassen.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px \qquad + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\text{1. binomische Formel}} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad -\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

Oder in Kurzform geschrieben: $\underline{\underline{x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$

Dabei hat der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ besondere Bedeutung.

Er heißt Diskriminante D

Damit lässt sich die Lösungsformel in abgekürzter Weise schreiben.

$$x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D} \qquad \text{oder} \qquad x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}$$

Ist $D > 0 \Rightarrow L = \{x_1 ; x_2\}$ Zwei Lösungselemente

Ist $D = 0 \Rightarrow L = \{x\}$ Ein Lösungselement (Doppellösung)

Ist $D < 0 \Rightarrow L = \{\ \}$ Kein Lösungselement

Bei der Lösung einer quadratischen Gleichung sollte man zuerst die Diskriminante bestimmen, um Auskunft über die Anzahl der Lösungen zu bekommen. Manchmal erspart man sich dadurch Rechenarbeit.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Beispiel:

$$x^2+6x+10=0 \Rightarrow p=6 \quad q=10$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=3^2-10=9-10=-1 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x^2-5x+2 &= 0 \quad |:3 \\ \Leftrightarrow \quad x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow p=-\frac{5}{3};\, q=\frac{2}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$\text{also } D=\left(-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}=\frac{25}{36}-\frac{2\cdot 12}{3\cdot 12}=\frac{25}{36}-\frac{24}{36}=\frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6} \quad \left| \begin{aligned} &\Rightarrow x_1=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=\underline{\underline{1}} \\ &\Rightarrow x_2=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \right.$$

<u>Nullstellen von quadratischen Funktionen:</u>

Um die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu bestimmen, ist stets eine quadratische Gleichung zu lösen.
Hat diese zwei Lösungselemente, so schneidet der Graph der quadratischen Funktion die x – Achse an zwei Stellen.
Hat sie nur eine Lösung, so berührt der Graph die x – Achse an einer Stelle (mit ihrem Scheitelpunkt).
Ist kein Lösungselement vorhanden, so verläuft der Graph oberhalb oder unterhalb der x – Achse, es gibt keinen Schnittpunkt.

<u>Lösungskontrolle:</u>

Wie bei jeder Gleichung kann die Lösung dadurch kontrolliert werden, dass man die Lösungselemente in die Ursprungsgleichung einsetzt, also die Probe macht.
Bei quadratischen Gleichungen geht es jedoch auch einfacher,
mit dem Wurzelsatz von Vieta:
Hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ zwei Lösungen, dann gilt:

$$-x_1-x_2=p \quad \text{und} \quad x_1\cdot x_2=q$$

Durch einfaches einsetzen in die Normalform der quadratischen Gleichung kann man das beweisen:

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

Addiere x_1 und x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{p = -x_1 - x_2}}$$

Multipliziere x_1 und x_2

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 \underbrace{+\frac{p}{2} \cdot \sqrt{D} - \frac{p}{2} \cdot \sqrt{D}}_{0} - D$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 \cdot x_2 = q}}$$

Beispiel:
Behauptung:

Die quadratische Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$

$p = 1$ und $q = -6$

Probe:

$$-x_1 - x_2 = -2 - (-3) = \underline{\underline{1 = p}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-3) = \underline{\underline{-6 = q}}$$

Es lassen sich umgekehrt mit dem Satz von Vieta auch quadratische Gleichungen konstruieren, die ganz bestimmte Lösungen haben.

Beispiel:
Wie muss eine quadratische Gleichung aussehen, deren Lösungsmenge

$L = \{-2\,; 1\}$ ist?

$$p = -x_1 - x_2 = -(-2) - 1 = 1$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 1 = -2$$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ ist die dazugehörige quadratische Gleichung

Bemerkung:

Dies ist nur eine quadratische Gleichung mit dieser Lösungsmenge.

Alle Vielfache davon haben die selbe Lösungsmenge.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Linearfaktoren.

Es gibt noch eine Möglichkeit quadratische Gleichungen zu konstruieren.

Soll $L = \{x_1 \mid x_2\}$ die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung sein,
so gilt: $\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0$ (Produkt)

Das ist die Linearform einer quadratischen Gleichung.
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.

Faktor 1 ist Null: $\Rightarrow (x - x_1) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$

Faktor 2 ist Null: $\Rightarrow (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_2$

Beispiel: $x_1 = 3$ oder $x_2 = -2$ sollen Lösungen einer quadratischen Gleichung sein.

Linearform: $(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$

quadr. Gl.: $x^2 - x - 6 = 0$

$p = -1 \quad q = -6 \Rightarrow D = (-0,5)^2 + 6 = 6,25$

$x_1 = 0,5 + \sqrt{6,25} = 3 \quad$ oder $\quad x_2 = 0,5 - \sqrt{6,25} = -2$

Zusammenfassung:

Typ I: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Umformung zu $x^2 = \boxed{}$ und Lösung durch wurzelziehen

Typ II: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Lösung durch ausklammern der Variablen x

$x(ax + b) = 0$ und den Satz vom Nullprodukt anwenden

Typ III: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Gleichung auf die Normalform bringen

$x^2 + px + q = 0$ und mit der $p - q -$Formel lösen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \text{ mit } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

für $D > 0$ gibt es 2 Lösungen $L = \{x_1 ; x_2\}$

für $D = 0$ gibt es eine doppelte Lösung $x_1 = x_2 \Rightarrow L = \{x_{1/2}\}$

für $D < 0$ gibt es keine Lösung $L = \{\ \} = \varnothing$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Wurzelsatz von Vieta:

Wurzelsatz von Vieta

Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei Lösungen, dann gilt:

$-x_1 - x_2 = p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Linearform einer quadratischen Gleichung

Soll $L = \{x_1 \mid x_2\}$ die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung sein,

so gilt: $\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0$ (Produkt)

oder:

$a(x - x_1)(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow L = \{x_1 \mid x_2\}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de