Lineare Gleichungen

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung. Enthält die Gleichung die Variable x nur in der 1. Potenz, so spricht man von einer linearen Gleichung.

Beispiele linearer Gleichungen mit der Lösungsvariablen x.

1.	$x+7=9$
2.	$12x-4=16+2x$
3.	$m+n=x+m-a$
4.	$x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$
5.	$\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}$
6.	$56-(7x-9)=9+(11x-3)-(6x+13)$
7.	$12-\left[(16+7x)+(3x-1)\right]=6+(2x-5)$
8.	$a^2b+b^2c-\left\{bx-\left[\left(a^2b-bx\right)-\left(b^2c+bx\right)-a^2b\right]+bx\right\}=0$

Die dargestellten Gleichungstypen sind die, die auf Aufgabenseiten häufig vorkommen. Dazu eine kurze Beschreibung:

1.	Einfache lineare Gleichung mit der Variablen x auf der linken Seite.
2.	Einfache lineare Gleichung, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
3.	Lineare Gleichung mit der Lösungsvariablen x und den Formvariablen m, n und a.
4.	Einfache lineare Gleichung mit Brüchen und der Variablen auf der linken Seite.
5.	Lineare Gleichung, mit Brüchen, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
6.	Lineare Gleichung mit Klammerausdrücken.
7.	Lineare Gleichung mit eckiger und runder Klammer (Zweifachklammerung).
8.	Lineare Gleichung mit geschweifter, eckiger und runder Klammer (Dreifachklammerung).

Bevor lineare Gleichungen gelöst werden, ein paar wichtige Begriffe, die im Zusammenhang von linearen Gleichungen oft auftauchen.

Die **Lösungsmenge (L)** enthält alle Werte, die für die Variable **x** eingesetzt werden dürfen. Normalerweise ist das bei linearen Gleichungen genau ein Wert.
Dieser Wert wird der **Grundmenge (G)** entnommen.

Gleichungen lösen bedeutet somit „Bestimmen der Lösungsmengen".

Die **Definitionsmenge (D)** ist die Menge, für die die mathematischen Terme, die in der Gleichung vorkommen, definiert sind.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung findet man durch **Äquivalenzumformung**, das ist eine Umformung, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändert.
Erlaubt ist:

Auf **beiden Seiten** einer Gleichung die gleiche **Zahl** oder den gleichen **Term** zu **addieren** oder zu **subtrahieren**.	**Beide Seiten** einer Gleichung mit der gleichen **Zahl**, mit demselben **Term** zu **multiplizieren** oder durch die gleiche Zahl zu **dividieren**.

Nicht erlaubt ist:
Multiplikation mit Null, Division durch Null, sowie quadrieren beider Seiten.

Beispiel:
Lineare Gleichung, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.
$12x - 4 = 16 + 2x$ Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, Grundmenge $G = \mathbb{R}$

Die Lösung erfolgt durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{array}{lrcll|l} & 12x - 4 & = & 16 + 2x & \mid +4 & \text{auf beiden Seiten 4 addieren} \\ \Leftrightarrow & 12x & = & 20 + 2x & \mid -2x & \text{auf beiden Seiten 2x subtrahieren} \\ \Leftrightarrow & 10x & = & 20 & \mid :10 & \text{beide Seiten durch 10 dividieren} \\ \Leftrightarrow & x & = & 2 & & \Rightarrow \underline{\underline{L = \{2\}}} \text{ ist die Lösungsmenge.} \end{array}$$

Beispiel:
Lineare Gleichung mit Formvariablen.
$ux - 2 = 8 - 2x$ mit $G = \mathbb{R}$ ist eine Parametergleichung
Die Variable u heißt Parameter oder Formvariable.
Die Variable x ist die Lösungsvariable.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von u.

$$\begin{array}{llcll} & ux - 2 & = & 8 - 2x & \mid +2x \\ \Leftrightarrow & ux + 2x - 2 & = & 8 & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & ux + 2x & = & 10 & \mid \text{x ausklammern} \\ \Leftrightarrow & x(u+2) & = & 10 & \mid :(u+2) \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{10}{u+2} & \end{array}$$

Die Division durch $u + 2$ ist nur erlaubt, wenn $u + 2 \neq 0$ ist, also für $u \neq -2$.

Für $u \neq -2$ hat die Gleichung die Lösung $x = \frac{10}{u+2}$

Als Lösungsmenge geschrieben: $L = \left\{ \frac{10}{u+2} \right\}; D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Parameter oder auch Formvariable ist lediglich ein Platzhalter für jeweils ein beliebiges Element aus der Definitionsmenge.

Beispiel:
Gleichung, mit Brüchen, bei der die Variable x auf beiden Seiten vorkommt.

$$\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}$$

Summand mit x auf die linke Seite bringen

$$\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}\,\Big|-\frac{4}{5}x$$

Summanden ohne x auf die rechte Seite bringen

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x-\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=-\frac{3}{4}\,\Big|+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$$

Auf beiden Seiten den Hauptnenner suchen

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x}_{30}=\underbrace{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}}_{HN=48}$$

Beide Seiten auf den Hauptnenner bringen

$$\Leftrightarrow \frac{20}{30}x+\frac{15}{30}x-\frac{24}{30}x=-\frac{36}{48}+\frac{40}{48}+\frac{18}{48}$$

Beide Seiten zusammenfassen und multiplizieren

$$\Leftrightarrow \frac{11}{30}x=\frac{22}{48}\,\Big|\cdot\frac{30}{11}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{22\cdot 30}{48\cdot 11}=\frac{2\cdot 30}{4\cdot 12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}\Rightarrow L=\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

Beispiel:
Lineare Gleichung mit Klammerausdrücken.

$$56-(7x-9)=9+(11x-3)-(6x+13)$$

Klammern auflösen, dabei Vorzeichenregeln beachten

$$\Leftrightarrow 56-7x+9=9+11x-3-6x-13$$

ordnen und zusammenfassen

$$\Leftrightarrow \quad -7x+65=5x-7\,|-5x$$
$$\Leftrightarrow \quad -12x+65=-7\,|-65$$
$$\Leftrightarrow \quad -12x=-72\,|:(-12)$$
$$\Leftrightarrow \quad x=6\Rightarrow L=\{6\}$$

<u>Beispiel:</u>
Lineare Gleichung mit eckiger und runder Klammer (Zweifachklammerung).

$12-\left[\left(16+7x\right)+\left(3x-1\right)\right]=6+\left(2x-5\right)$

Zuerst die runden Klammern lösen

$\Leftrightarrow 12-\left[16+7x+3x-1\right]=6+2x-5$

zusammenfassen und ordnen

$\Leftrightarrow 12-\left[10x+15\right] \qquad =2x+1$

eckige Klammer lösen

$\Leftrightarrow 12-10x-15 \qquad =2x+1$

zusammenfassen und ordnen

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow -10x-3 &= 2x+1 \mid -2x \\
\Leftrightarrow -12x-3 &= \quad 1 \mid +3 \\
\Leftrightarrow -12x &= \quad 4 \mid :\left(-12\right) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{4}{-12}=-\frac{1}{3} \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{3}\right\}
\end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u>
Lineare Gleichung mit geschweifter, eckiger und runder Klammer (Dreifachklammerung).

$a^2b+b^2c-\left\{bx-\left[\left(a^2b-bx\right)-\left(b^2c+bx\right)-a^2b\right]+bx\right\}=0$

runde Klammern lösen

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c-\left\{bx-\left[a^2b-bx-b^2c-bx-a^2b\right]+bx\right\}=0$

zusammenfassen

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c-\left\{bx-\left[-2bx-b^2c\right]+bx\right\}=0$

eckige Klammer lösen

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c-\left\{bx+2bx+b^2c+bx\right\}=0$

zusammenfassen

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c-\left\{4bx+b^2c\right\}=0$

geschweifte Klammer lösen

$\Leftrightarrow a^2b+b^2c-4bx-b^2c=0$

zusammenfassen und ordnen

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow -4bx+a^2b &= 0 \mid -a^2b \\
\Leftrightarrow -4bx &= -a^2b \mid :\left(-4b\right) \\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{-a^2b}{-4b}=\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}a^2 \Rightarrow L=\left\{\frac{1}{4}a^2\right\}
\end{aligned}$$

Gleichungen können die Lösungsvariable auch im Nenner enthalten.
Solche Gleichungen nennt man **Bruchgleichungen**. Sie lassen sich aber häufig durch Äquivalenzumformungen in linearen Gleichungen umformen.

Beispiel:
Eine Bruchgleichung wird zur linearen Gleichung.

$\frac{2x}{x-1}=3$ Definitionsmenge $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, Grundmenge $G=\mathbb{R}$

	$\frac{2x}{x-1}$	$=$	3	$\mid\cdot(x-1)$	beide Seiten mit $x-1$ multiplizieren
$\Leftrightarrow$	$2x$	$=$	$3x-3$	$\mid -3x$	Auf beiden Seiten 3x subtrahieren
$\Leftrightarrow$	$-x$	$=$	-3	$\mid :(-1)$	Beide Seiten durch -1 dividieren
$\Leftrightarrow$	x	$=$	3		$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{3\}}}$ ist die Lösungsmenge, da $3\in D$ ist.

Bei Bruchgleichungen ist die Definitionsmenge stets anzugeben.

<u>Sonderfälle bei linearen Gleichungen:</u>
In den meisten Fällen hat eine lineare Gleichung genau eine Lösung, wie in obigen Beispielen gezeigt.
Es kann aber auch vorkommen, dass eine lineare Gleichung keine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat.

<u>Beispiel:</u>
Die lineare Gleichung hat keine Lösung.

$2x+3+x = 4+3x \mid -3x$

$\Leftrightarrow 2x+x-3x+3 = 4 \mid -3$

$\Leftrightarrow 3x-3x = 1$

$\Leftrightarrow 0x = 1$ Gleichung nicht lösbar $\Rightarrow L=\{\ \}$

<u>Beispiel:</u>
Die lineare Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

$4u+2-4(2u-2)+8(0{,}5u-4)=-22 \quad D=\mathbb{R}, G=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4u+2-8u+8+4u-32=-22$

$\Leftrightarrow 4u-8u+4u+2+8-32=-22$

$\Leftrightarrow 2+8-32=-22$

$\Leftrightarrow -22=-22$

$\Rightarrow \underline{\underline{L=\mathbb{R}}}$ Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen,

denn jedes $u\in\mathbb{R}$ führt zu einer wahren Aussage und ist somit eine Lösung.

Schlussbemerkung:
Für Anfänger empfiehlt es sich bei der Lösung linearer Gleichungen in kleinen Schritten vorzugehen. Wer hingegen schon mehr Routine hat, kann auch mehrere Schritte zugleich vornehmen.
An einem etwas aufwendigem Beispiel soll das gezeigt werden.

Aufwendiges Beispiel etwas kürzer:

$$5(3x+10)-(5+4x)(5-4x)-(2x+3)(8x-2)+20=(x+1)^2-x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow 15x+50-\left[25-16x^2\right]-\left[16x^2+20x-6\right]+20 \quad = x^2+2x+1-x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow 15x+70-25+\cancel{16x^2}-\cancel{16x^2}-20x+6 \quad =1$$

$$\Leftrightarrow -5x+51 \quad =1 \,|\, -51$$

$$\Leftrightarrow -5x \quad =-50 \,|:(-5)$$

$$\Leftrightarrow x \quad =10 \Rightarrow L=\{10\}$$