| **Klassenarbeit** | **Mathematik** | **Bearbeitungszeit 90 min.** | **Di 12.04.11** |
|---|---|---|---|
| **SG29D Gruppe A** | **NAME:** | | |

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$
   Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

2. Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^{2} 4 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$

3. Durch $f(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4}t}$ mit $t =$ Zeit in Stunden nach der Einnahme und $f(t) = \frac{mg}{Liter}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 24 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

   a) Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? Wie groß ist dieser höchste Wert?
   Kontrollergebnis: $f'(t) = \left(10 - \frac{5}{2}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} \Rightarrow f''(t) = \left(-5 + \frac{5}{8}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}$

   b) Berechnen Sie den Wendepunkt und machen Sie eine Aussage über dessen Bedeutung im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung.
   (Überprüfung des Wendepunktes mittels der 3. Ableitung ist nicht nötig)

   c) Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Beschreiben Sie die Entwicklung der Medikamentenkonzentration in den ersten 24 Stunden.

| $t$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | | 12,1 | | 13,4 | | 8,2 | 6,0 |
| $t$ | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | |
| $f(t)$ | | 2,9 | | 1,4 | | 0,6 | |

   d) Wie hoch ist die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 24 Stunden? Berechnen Sie dazu folgendes Integral:

$$M = \frac{10}{24} \cdot \int_{0}^{24} t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} dt = \frac{10}{24}(-4t - 16) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} \Big|_{0}^{24}$$

1) $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$

$P_y(0 \mid y_s)$

$\Rightarrow y_s = f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0}$
$= 1 - 4 \cdot 1$
$= -3$
$\Rightarrow P_y(0 \mid -3)$

$P_x(x_s \mid 0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} \mid +4 \cdot e^{x}$
$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\ )$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(4 \cdot e^{x})$
$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$
$\Leftrightarrow x = x_s = \ln(4) \Rightarrow P_x(\ln(4) \mid 0)$

2) $\int_{-2}^{2} 4 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x} dx = 4 \cdot \int_{-24}^{2} e^{-\frac{1}{4} \cdot x} dx$ Mit $\int e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$ und $k = -\frac{1}{4}$ gilt:

$$4 \cdot \int_{-2}^{2} e^{-\frac{1}{4} \cdot x} dx = 4 \left( \frac{1}{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = 4 \left( -4 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = -16 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot x} \Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= -16 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 2} - \left( -16 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot (-2)} \right) = -16 \cdot e^{-\frac{1}{2}} + 16 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 16{,}675$$

3a) $f(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$ Extremwertbestimmung:

$f(t) = \underbrace{10 \cdot t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4} t}}_{v}$

$f'(t) = u' \cdot v + u \cdot v'$

mit $u = 10 \cdot t \Rightarrow u' = 10$

und $v = e^{-\frac{1}{4} t} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

$\Rightarrow f'(t) = 10 \cdot e^{-\frac{1}{4} t} + 10 \cdot t \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$
$= 10 \cdot e^{-\frac{1}{4} t} - \frac{10}{4} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$
$= \left( 10 - \frac{5}{2} \cdot t \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

$f'(t) = \left( 10 - \frac{5}{2} \cdot t \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

$f'(t) = \underbrace{\left( 10 - \frac{5}{2} \cdot t \right)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4} t}}_{v}$

$f''(t) = u' \cdot v + u \cdot v'$

mit $u = 10 - \frac{5}{2} \cdot t \Rightarrow u' = -\frac{5}{2}$

und $v = e^{-\frac{1}{4} t} \Rightarrow v' = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

$f''(t) = -\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{1}{4} t} + \left( 10 - \frac{5}{2} \cdot t \right) \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$
$= \left[ -\frac{5}{2} + \left( -\frac{10}{4} + \frac{5}{8} \cdot t \right) \right] \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$
$= \left( -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} + \frac{5}{8} \cdot t \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

$f''(t) = \left( -5 + \frac{5}{8} \cdot t \right) \cdot e^{-\frac{1}{4} t}$

Notwendige Bedingung:

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(10-\frac{5}{2}\cdot t\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}\cdot t}}_{\neq 0}=0$$

$$10-\frac{5}{2}\cdot t=0 \mid +\frac{5}{2}\cdot t$$

$$\Leftrightarrow 10=\frac{5}{2}\cdot t \mid \cdot\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{5}=t$$

$\Leftrightarrow t=t_E=4$ mögliche Extremstelle

$$f''(t_E)=f''(4)=\left(-5+\frac{5}{8}\cdot 4\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4}$$
$$=\left(-5+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{-1}$$
$$=\left(-\frac{10}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{-1}$$
$$=-\frac{5}{2}\cdot e^{-1}<0$$

$\Rightarrow$ Relatives Maximum bei $t=4$

$$f(4)=10\cdot 4\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4}=40\cdot e^{-1}\Rightarrow P_{Max}\left(4 \mid 40\cdot e^{-1}\approx 14,715\right)$$

Nach 4 Stunden erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert.
Sie beträgt dann etwa 14,715 mg/Liter

3b) Der Wendepunkt:

Notwendige Bedingung: $f''(t)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(-5+\frac{5}{8}\cdot t\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}t}}_{\neq 0}=0$

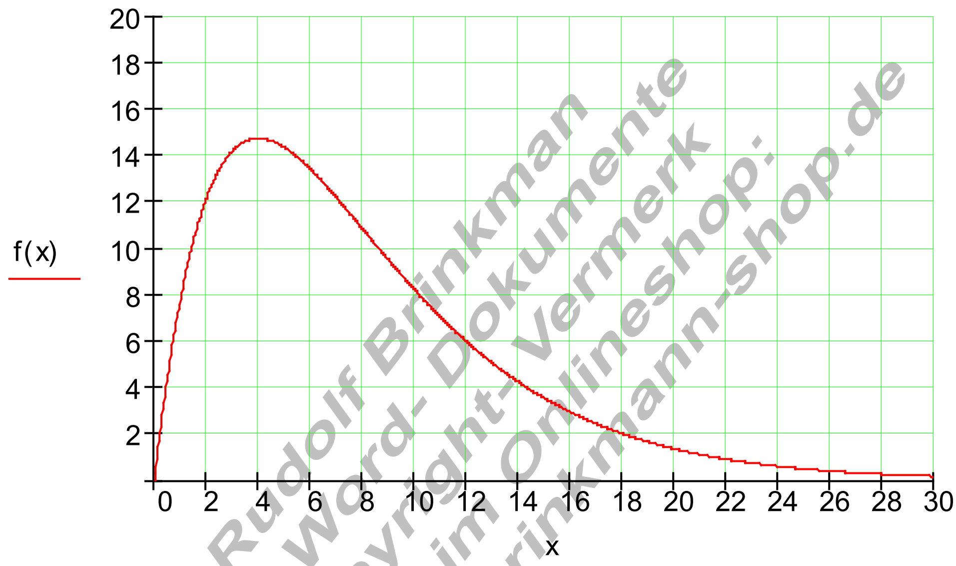
$$-5+\frac{5}{8}\cdot t=0 \mid +5 \Leftrightarrow \frac{5}{8}\cdot t=5 \mid \cdot\frac{8}{5}\Leftrightarrow t=8 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f(8)=10\cdot 8\cdot e^{-\frac{8}{4}}=80\cdot e^{-2}\Rightarrow P_W\left(8 \mid 80\cdot e^{-2}\approx 10,827\right)$$

Der Wendepunkt liegt rechts vom relativen Maximum, also im Bereich der abklingenden Konzentration. Das bedeutet, im Wendepunkt ist die Abnahme der Konzentration am größten. (Der Wendepunkt ist ein Punkt, in dem die Steigung einen Extremwert annimmt)

1c)

| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | 0 | 12,1 | 14,72 | 13,4 | 10,83 | 8,2 | 6,0 |
| t | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | |
| f(t) | 4,23 | 2,9 | 2 | 1,4 | 0,9 | 0,6 | |






Beschreibung:
Die Konzentration beginnt mit einem Anfangswert von Null. In den ersten 4 Stunden steigt sie relativ schnell, um bei t = 4 Stunden ihren Maximalwert von etwa 14 mg/Liter zu erreichen. Danach verringert sich die Konzentration nach einer abklingenden e- Funktion, um nach 24 Stunden nur noch sehr geringe Werte aufzuweisen. Nach t = 8 Stunden ist die Abnahme der Konzentration am größten (Wendepunkt).

1d) Die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 24 Stunden:

$$M = \frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} f(t)\,dt = \frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} 10 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt = \frac{10}{24} \cdot \int_0^{24} t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt$$

Variante I (Partielle Integration)

$$\int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4} \cdot t}}_{v'}\,dt = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dt$$

mit $u = t \Rightarrow u' = 1$ und $v' = e^{-\frac{1}{4} \cdot t} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt = -4 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}$ wird

$$\int t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt = t \cdot (-4) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} - \int 1 \cdot (-4) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt$$

$$= -4 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} + 4 \cdot \int e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt = -4 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} + 4 \cdot (-4) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}$$

$$= -4 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} - 16 \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} = (-4t - 16) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \int t \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t}\,dt = (-4t - 16) \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} + C$$

$$M = \frac{10}{24} \cdot \int_0^{24} t \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot t}\, dt = \frac{10}{24}\left(-4t - 16\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot t} \Big|_0^{24}$$

$$= \frac{10}{24}\left(-4 \cdot 24 - 16\right) \cdot e^{-6} - \left[\frac{10}{24}\left(-4 \cdot 0 - 16\right) \cdot e^{0}\right]$$

$$= \frac{10}{24} \cdot \left(-112\right) \cdot e^{-6} + \frac{10}{24} \cdot 16 \approx 6{,}551$$

Die mittlere Konzentration des Medikamentes innerhalb der ersten 24 Stunden beträgt 6,551 mg/Liter.

Variante II mit $\int x \cdot e^{k\cdot x}\, dx = \left(\frac{1}{k} \cdot x - \frac{1}{k^2}\right) \cdot e^{k\cdot x} + C$ und $\int e^{k\cdot x}\, dx = \frac{1}{k} \cdot e^{k\cdot x} + C$

mit $k = -\frac{1}{4}$ gilt:

$$M = \frac{10}{24} \cdot \int_0^{24} t \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot t}\, dt = \frac{10}{24} \cdot \left(-4 \cdot t - 16\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot t} \Big|_0^{24}$$

Weitere Rechnung siehe oben.

| **Klassenarbeit** | **Mathematik** | **Bearbeitungszeit 90 min.** | **Di 12.04.11** |
|---|---|---|---|
| **SG29D Gruppe B** | **NAME:** | | |

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 \cdot e^{x} - e^{2x}$
   Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

2. Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \cdot e^{-4x} dx$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 12 \cdot e^{\frac{1}{25}x} - \frac{1}{8} x \cdot e^{\frac{1}{25}x}$
   Der Graph von f(x) beschreibt die Förderung von Bodenschätzen.
   Im Jahre x = 0 (1900) wurde mit der industriellen Förderung begonnen.
   f(x) gibt die geförderte Menge in 1000 Tonnen pro Jahr an.

   a) Wie hoch war die jährliche Förderung zu Beginn der Aufzeichnungen?

   b) In welchem Jahr wurde die Förderung eingestellt?

   c) In welchem Jahr wurde die maximale Förderquote erreicht und wie hoch war diese?

   Kontrollergebnis : $f'(x) = \left(\frac{71}{200} - \frac{1}{200} x\right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot x} \Rightarrow f''(x) = \left(\frac{46}{5000} - \frac{1}{5000} x\right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot x}$

   d) Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Beschreiben Sie die Entwicklung der Förderquote über den gesamten Abbauzeitraum.

| x | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 16 | | 27,4 | | 42,5 |
| x | 60 | 70 | 71 | 80 | 90 | 96 |
| $f(x)$ | | 53,4 | | 49,1 | 27,5 | |

   e) Wie viel Erz wurde über den gesamten Abbauzeitraum (96 Jahre) gefördert? Berechnen Sie dazu folgendes Integral:

$$\text{Menge} = \int_{0}^{96} \left(12 - \frac{1}{8} x\right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot x} dx = \left.\left(\frac{3025}{8} - \frac{25}{8} \cdot x\right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot x}\right|_{0}^{96}$$

1) $f(x)=4\cdot e^{x}-e^{2x}$

$P_y(0\,|\,y_s)$

$\Rightarrow y_s=f(0)=4\cdot e^{0}-e^{0}$
$=4\cdot 1-1$
$=3$
$\Rightarrow P_y(0\,|\,3)$

$P_x(x_s\,|\,0)$

$f(x)=0\Leftrightarrow 4\cdot e^{x}-e^{2x}\;|+e^{2\cdot x}$
$\Leftrightarrow 4\cdot e^{x}=e^{2\cdot x}\;|\ln(\;)$
$\Leftrightarrow \ln\left(4\cdot e^{x}\right)=\ln\left(e^{2\cdot x}\right)$
$\Leftrightarrow \ln(4)+x=2x\;|-x$
$\Leftrightarrow x=x_s=\ln(4)\Rightarrow P_x(\ln(4)\,|\,0)$

2) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\cdot e^{-4x}dx=\frac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{1}e^{-4x}dx$ Mit $\int e^{k\cdot x}\,dx=\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x}$ und $k=-4$ gilt:

$$\frac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{1}e^{-4x}dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{-4}\cdot e^{-4x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-4\cdot x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{1}{16}\cdot e^{-4\cdot x}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{16}\cdot e^{-4}-\left(-\frac{1}{16}\cdot e^{4}\right)=\frac{1}{16}\cdot e^{4}-\frac{1}{16}\cdot e^{-4}=\frac{1}{16}\left(e^{4}-e^{-4}\right)\approx 3{,}411$$

3a) $f(x)=12\cdot e^{\frac{1}{25}x}-\frac{1}{8}x\cdot e^{\frac{1}{25}x}=\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$

$f(0)=\left(12-\frac{1}{8}\cdot 0\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot 0}=(12-0)\cdot 1=12$

Zu Beginn der Aufzeichnung betrug die jährliche Förderung
12 000 Tonnen/Jahr.

3b) $f(x)=\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$

$f(x)=0\Leftrightarrow \underbrace{\left(12-\frac{1}{8}x\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{25}x}}_{\neq 0}=0$

$\Leftrightarrow 12-\frac{1}{8}x=0\;|+\frac{1}{8}\cdot x$
$\Leftrightarrow 12=\frac{1}{8}\cdot x\;|\cdot 8$
$\Leftrightarrow 96=x$
$\Leftrightarrow x=96$

Die Förderung wurde im Jahr 1996 eingestellt.

3c)

$$f(x)=\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

mit $u=12-\frac{1}{8}x \Rightarrow u'=-\frac{1}{8}$

und $v=e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{25}\cdot e^{\frac{1}{25}x}$

$$f'(x)=-\frac{1}{8}\cdot e^{\frac{1}{25}x}+\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot\frac{1}{25}\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left[-\frac{1}{8}+\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot\frac{1}{25}\right]\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{8}+\frac{12}{25}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(-\frac{25}{200}+\frac{96}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f'(x)=\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f'(x)=\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

mit $u=\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x \Rightarrow u'=-\frac{1}{200}$

und $v=e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{25}\cdot e^{\frac{1}{25}x}$

$$f''(x)=-\frac{1}{200}\cdot e^{\frac{1}{25}x}+\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot\frac{1}{25}\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left[-\frac{1}{200}+\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)\cdot\frac{1}{25}\right]\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{200}+\frac{71}{5000}-\frac{1}{5000}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(-\frac{25}{5000}+\frac{71}{5000}-\frac{1}{5000}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$=\left(\frac{46}{5000}-\frac{1}{5000}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f''(x)=\left(\frac{46}{5000}-\frac{1}{5000}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$



Notwendige Bedingung:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{25}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Rightarrow \frac{71}{200}-\frac{1}{200}\cdot x=0 \mid +\frac{1}{200}\cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{71}{200}=\frac{1}{200}\cdot x \mid \cdot 200$$

$$\Leftrightarrow 71=x$$

$$\Leftrightarrow x=x_E=71 \text{ mögliche Extremstelle}$$

$$f''(x_E)=f''(71)=\left(\frac{46}{5000}-\frac{1}{5000}\cdot 71\right)\cdot e^{\frac{71}{25}}$$

$$=\left(\frac{46}{5000}-\frac{71}{5000}\right)\cdot e^{\frac{71}{25}}$$

$$=\left(-\frac{25}{5000}\right)\cdot e^{\frac{71}{25}}$$

$$=-\frac{1}{200}\cdot e^{\frac{71}{25}}<0$$

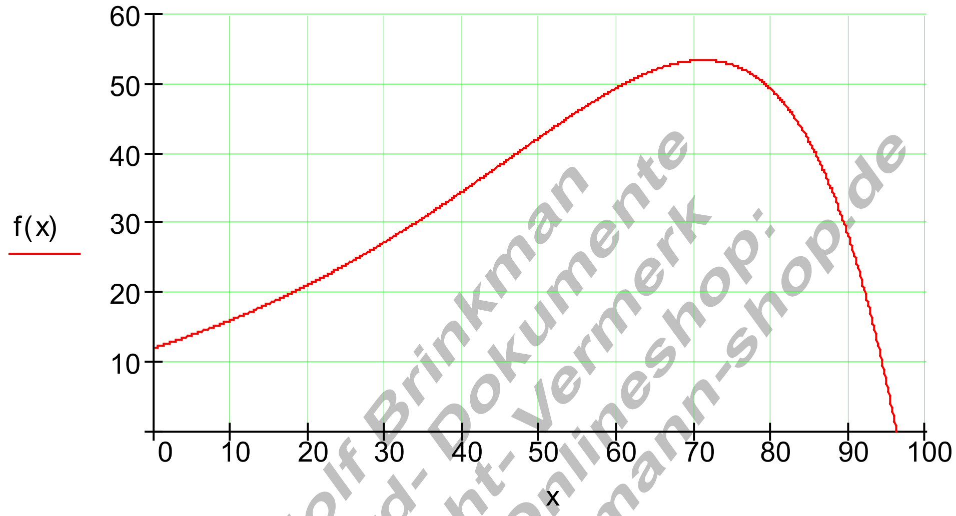
$\Rightarrow$ Relatives Maximum bei $x=71$

$$f(71)=\left(12-\frac{71}{8}\right)\cdot e^{\frac{71}{25}}=\left(\frac{96}{8}-\frac{71}{8}\right)\cdot e^{\frac{71}{25}}=\frac{25}{8}\cdot e^{\frac{71}{25}} \Rightarrow P_{Max}\left(71 \mid \frac{25}{8}\cdot e^{\frac{71}{25}}\approx 53{,}487\right)$$

Die maximale Förderquote wurde 1971 erreicht. Sie betrug 53 478 Tonnen/Jahr.

3d)

| x | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 12 | 16 | 21,1 | 27,4 | 34,7 | 42,5 |
| x | 60 | 70 | 71 | 80 | 90 | 96 |
| f(x) | 49,6 | 53,4 | 53,5 | 49,1 | 27,5 | 0 |




Beschreibung:
Die Förderung begann im Jahr 1900 mit einer Quote von 12 000 Tonnen/Jahr. Bis zum Jahr 1971 nahm die Förderquote ständig zu um dort ihren Maximalwert von 53 487 Tonnen/Jahr zu erreichen. Ab da verringert sie sich sehr stark um im Jahr 1996 völlig zum Erliegen zu kommen.

3e)

$$\text{Menge} = \int_0^{96} f(x)\,dx = \int_0^{96} \left(12 - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx$$

Variante I (partielle Integration)

$$\int \underbrace{\left(12 - \frac{1}{8}x\right)}_{u} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{25}\cdot x}}_{v'}\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

$$\text{mit } u = 12 - \frac{1}{8}x \Rightarrow u' = -\frac{1}{8} \text{ und } v' = e^{\frac{1}{25}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx = 25 \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} + C$$

$$\int \left(12 - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx = \left(12 - \frac{1}{8}x\right) \cdot 25 \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} - \int \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 25 \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx$$

$$= \left(300 - \frac{25}{8} \cdot x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} + \frac{25}{8} \int e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx$$

$$= \left(300 - \frac{25}{8} \cdot x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} + \frac{25}{8} \cdot 25 \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}$$

$$= \left[\left(300 - \frac{25}{8} \cdot x\right) + \frac{625}{8}\right] \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}$$

$$= \left(\frac{2400}{8} + \frac{625}{8} - \frac{25}{8} \cdot x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} = \left(\frac{3025}{8} - \frac{25}{8} \cdot x\right) \cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x} + C$$

$$\int_0^{96}\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx=\left(\frac{3025}{8}-\frac{25}{8}\cdot x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\Big|_0^{96}$$

$$=\left(\frac{3025}{8}-\frac{2400}{8}\right)\cdot e^{\frac{96}{25}}-\left(\frac{3025}{8}-0\right)\cdot e^{0}$$

$$=\frac{625}{8}\cdot e^{\frac{96}{25}}-\frac{3025}{8}\approx 3256{,}678$$

Über dem gesamten Abbauzeitraum wurde 3 256 678 Tonnen Erz gefördert.

Variante II mit $\int x\cdot e^{k\cdot x}\,dx=\left(\frac{1}{k}\cdot x-\frac{1}{k^2}\right)\cdot e^{k\cdot x}+C$ und $\int e^{k\cdot x}\,dx=\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x}+C$

mit $k=\frac{1}{125}$ gilt:

$$\int\left(12-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx=12\cdot\int e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx-\frac{1}{8}\cdot\int x\,e^{\frac{1}{25}\cdot x}\,dx$$

$$=12\cdot 25\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}-\frac{1}{8}(25x-625)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}$$

$$=300\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}-\left(\frac{25}{8}x-\frac{625}{8}\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}=\left(300-\frac{25}{8}x+\frac{625}{8}\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}$$

$$=\left(\frac{2400}{8}+\frac{625}{8}-\frac{25}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}=\left(\frac{3025}{8}-\frac{25}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{25}\cdot x}+C$$

Weitere Rechnung siehe oben.