Klassenarbeit für Nachschreiber	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**
Klasse/Kurs: SG29 D	**NAME:**	

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Wissensfragen	
	a)	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
	b)	Wie lautet der Satz vom Nullprodukt?
	c)	Woran erkennt man Punktsymmetrie bei einer ganzrationalen Funktion? Notieren Sie dazu eine Beispielfunktion.

A1	Lösung	
	a)	Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab. Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.
	b)	Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.
	c)	Punktsymmetrie liegt vor, wenn es in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten gibt. Beispiel: $f(x) = x^3 + x$

2. Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung und verläuft durch die Punkte $P_1(\,3 \mid 0\,)$ und $P_2(\,5 \mid 5\,)$.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen.

Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{16}x$

A2 Lösung

Die Funktionsgleichung:
Wegen der Punktsymmetrie kann folgender Ansatz gemacht werden:

$f(x) = a_3x^3 + a_1x \qquad P_1(3\,|\,0): f(3) = 27a_3 + 3a_1 = 0$

$P_2(5\,|\,5): f(3) = 125a_3 + 5a_1 = 5$

a_1	a_3	
3	27	0 | :3
5	125	5 | 5
1	9	0
1	25	1 II − I
1	9	0
0	16	1

$16a_3 = 1 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{16}$

$a_1 + 9a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 + \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{9}{16}$

Funktionsgleichung:

$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{16}x$

A2 Lösung

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|0) = P_{x1}(0|0)$ 1. Nullstelle

$P_2(3|0) = P_{x2}(3|0)$ 2. Nullstelle

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3$$

$\Rightarrow x_2 = 3\,;\, x_3 = -3 \Rightarrow P_{x3}(-3|0)$ 3. Nullstelle

A2 Lösung

Die Werte für die Wertetabelle werden von Hand berechnet:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{16}x$$

$$f(1) = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{8}{16} = -0{,}5$$

$$f(2) = \frac{8}{16} - \frac{18}{16} = -\frac{10}{16} = -0{,}625$$

$$f(4) = \frac{64}{16} - \frac{36}{16} = -\frac{28}{16} = 1{,}75$$

Wegen der Punktsymmetrie gilt:

$f(-x) = -f(x)$

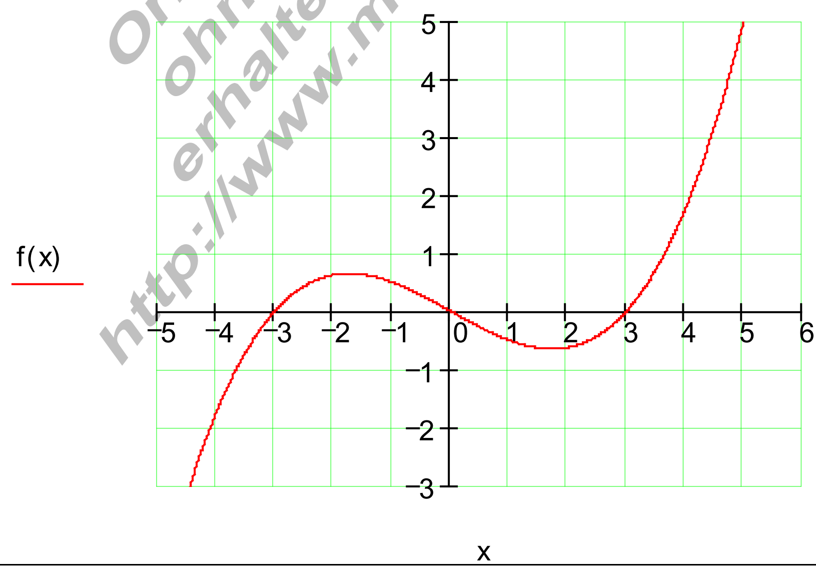
$f(-1) = -f(1) = 0{,}5$

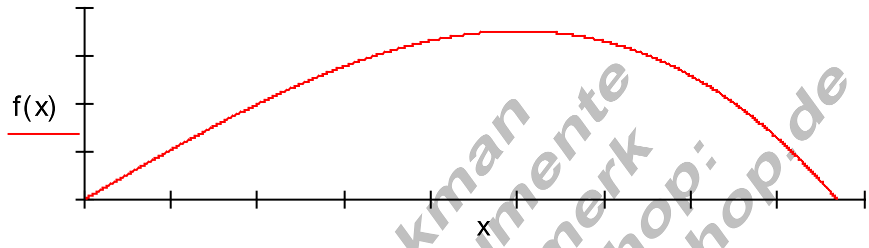
$f(-2) = -f(2) = 0{,}625$

$f(-4) = -f(4) = -1{,}75$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−1,75	0	0,65	0,5	0	−0,5	−0,625	0	1,75	5

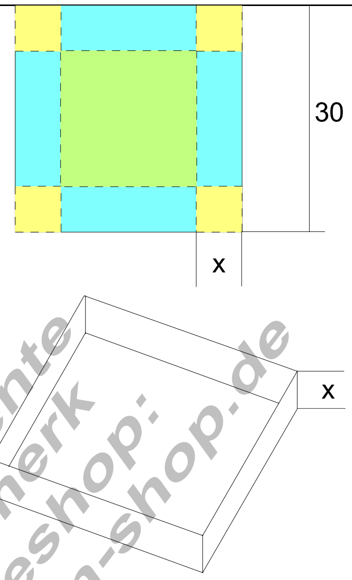
A2 Lösung



3.	Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf $f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \qquad \text{für } x > 0$ Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m 	
	a)	In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe. Wie groß ist diese? (Achten Sie auf den Maßstab!)
	b)	Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?

A3	Lösung	
	a)	$50\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} x = 5 \Rightarrow$ $y_{Max} = f(5) = -\frac{7}{250}\cdot 5^3 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{250}\cdot 125 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{2} + \frac{21}{2} = 7$ In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe von 7 m.
	b)	$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle $-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{75} \approx \pm 8{,}66$ nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt $x = 8{,}66$ bedeutet 86,6 m Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

4.		Aus einem quadratischen Karton der Seitenlänge 30 cm wird durch falten eine Schachtel ohne Deckel mit der Höhe x geformt.
	a)	Zeigen Sie, dass man nur für $0 < x < 15$ eine solche Schachtel formen kann.
	b)	Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der das Volumen V in Abhängigkeit von x beschreibt. Kontrollergebnis: $4x^3 - 120x^2 + 900x$
	c)	Stellen Sie eine Wertetabelle auf, zeichnen Sie den Graphen und bestimmen Sie näherungsweise das maximale Volumen.



A4	Lösung	
a)	x muss positiv sein $\Rightarrow x > 0$ 2x muss kleiner als die Seitenlänge sein $\Rightarrow 2x < 30 \Leftrightarrow x < 15$	$\Rightarrow 0 < x < 15$

A4 Lösung

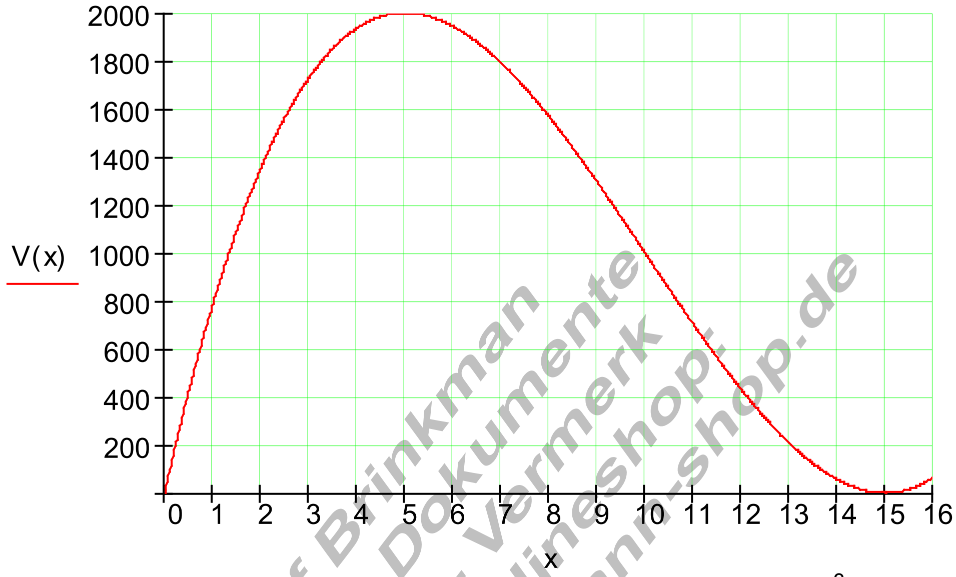
b) $V = a \cdot b \cdot h$ mit $h = x$ und $a = 30 - 2x$ und $b = 30 - 2x$ gilt:

$V(x) = (30 - 2x)(30 - 2x)x = \underline{\underline{4x^3 - 120x^2 + 900x}}$

Wertetabelle:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15
V(x)	0	1353	1936	1944	1568	1000	432	56	0

A4	Lösung
	c)



Das maximale Volumen der Schachtel liegt bei etwa 2000 cm^3 und gilt für einen x – Abschnitt von etwa 5 cm.
Eine exakte Berechnung ist erst mit Hilfe der Differentialrechnung möglich.

Viel Erfolg