Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 21.04.10**
SG29 D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Wissensfragen	
	a)	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
	b)	Wie lautet der Satz vom Nullprodukt?
	c)	Wovon hängt der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ab?

Zu 1 a)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 b)
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Zu 1 c)
Der Koeffizient des Summanden mit dem höchsten Exponenten bestimmt den Verlauf des Graphen.

2.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-3x$	
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Wie ist der Verlauf des Graphen?

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-3x \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{1}{2}x^2-3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$x^2-\frac{1}{2}x-3=0 \text{ mit } p=-\frac{1}{2} \text{ und } q=-3$$

$$\text{wird } D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{16}+\frac{48}{16}=\frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=2 \\ x_2=\frac{1}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Nullstellen: } x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=-\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0|0);P_{x2}(2|0);P_{x3}\left(-\frac{3}{2}|0\right)}}$$

b) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

3.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$
a)	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
b)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
c)	Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.
d)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Dabei sei $P_{max}(-1\,|\,5)$ ein Hochpunkt und $P_{min}\left(\frac{5}{3}\,\middle|\,-\frac{121}{27}\right)$ ein Tiefpunkt.

Wertetabelle zu c):

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	–7,38		3,88		4,13		–0,63		–4,38		–1,13	

a) Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{0} & \underline{-5} & \\
 & 1 & 0 & -5 & -3 & = f(1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} & \\
 & 1 & 1 & -3 & -4 & = f(2) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{2} & \underline{3} & \\
 & 1 & -2 & -3 & 5 & = f(-1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{6} & \underline{-2} & \\
 & 1 & -3 & 1 & 0 & = f(-2)
\end{array}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 2\right) : (x+2) = x^2 - 3x + 1 \\
\underline{-\left(x^3 + 2x^2\right)} \\
\quad -3x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(-3x^2 - 6x\right)} \\
\qquad\quad x + 2 \\
\qquad\quad \underline{-(x+2)}
\end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ mit $p = -3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2{,}62 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0{,}38 \end{array}\right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\,|\,2) \quad P_{x1}(-2\,|\,0)$

$P_{x2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

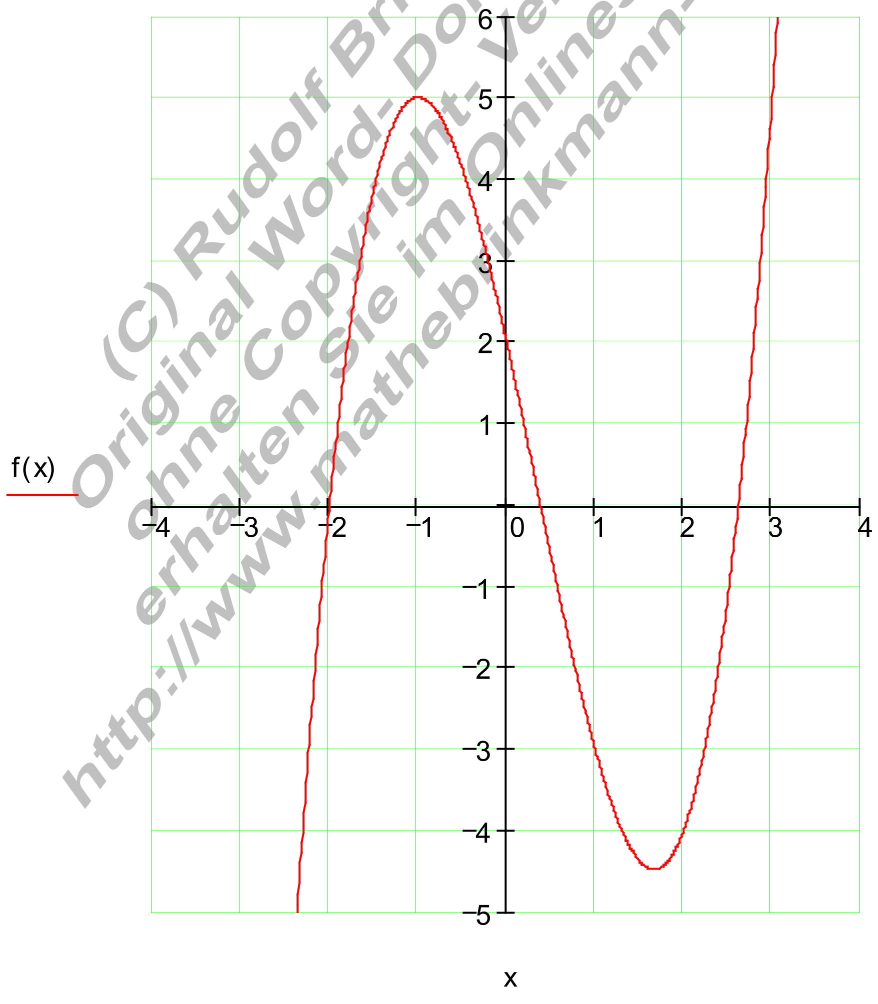
$P_{x2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

c) Die Wertetabelle:

		P_{x1}		P_{max}		P_y		
x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−7,38	0	3,88	5	4,13	2	−0,63	−3
					P_{min}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1,5	2	2,5	3	$1,\overline{6}$	2,62	0,38	
f(x)	−4,38	−4	−1,13	5	−4.48	0	0	

$$\begin{array}{lccccl} & 1 & -1 & -5 & 2 & \\ x=3 & \downarrow & \underline{3} & \underline{6} & \underline{3} & \\ & 1 & 2 & 1 & 5 & =f(3) \end{array}$$

d)

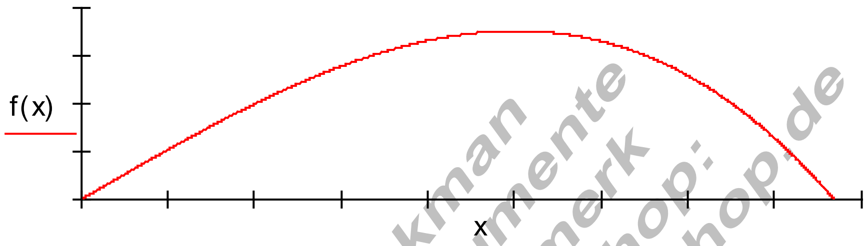


4. Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \qquad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m

Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m



a)	In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe. Wie groß ist diese? (Achten Sie auf den Maßstab!)
b)	Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?

Zu 4a)

$$50\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} x = 5 \Rightarrow y_{Max} = f(5) = -\frac{7}{250}\cdot 5^3 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{250}\cdot 125 + \frac{21}{10}\cdot 5 = -\frac{7}{2} + \frac{21}{2} = 7$$

In einer Entfernung von 50 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe von 7 m.

Zu 4 b)

$$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{75} \approx \pm 8{,}66$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 8{,}66$ bedeutet 86,6 m

Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Viel Erfolg

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 21.04.10**
SG29 D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Wissensfragen	
	a)	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?
	b)	Wie lautet der Satz vom Nullprodukt?
	c)	Wovon hängt der Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ab?

Zu 1 a)
Die Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion hängt von ihrem Grad ab.
Grad gerade: f(x) hat höchstens n Nullstellen
Grad ungerade: f(x) hat mind. eine aber höchstens n Nullstellen.

Zu 1 b)
Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Zu 1 c)
Der Koeffizient des Summanden mit dem höchsten Exponenten bestimmt den Verlauf des Graphen.

2.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$	
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Wie ist der Verlauf des Graphen?

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

$$f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-3x \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{2}x^2-3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$x^2+\frac{1}{2}x-3=0 \text{ mit } p=\frac{1}{2} \text{ und } q=-3$$

$$\text{wird } D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{16}+\frac{48}{16}=\frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\quad \begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=\frac{3}{2} \\ x_2=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}=-2 \end{array}\right.$$

$$\text{Nullstellen: } x_1=0 \quad x_2=\frac{3}{2} \quad x_3=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0);P_{x2}\left(\frac{3}{2}\,|\,0\right);P_{x3}(-2\,|\,0)}}$$

b) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

3.	Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$
a)	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
b)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
c)	Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.
d)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Dabei sei $P_{min}(1\,\vert\,-5)$ ein Tiefpunkt und $P_{max}\left(-\frac{5}{3}\,\middle\vert\,\frac{121}{27}\right)$ ein Hochpunkt.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)		1,13		4,38		0,63		−4,13		−3,88		7,38

a) Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$

$x^2 + 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrrl} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{2} & \underline{-3} & \\ & 1 & 2 & -3 & -5 & = f(1) \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -2 & \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{6} & \underline{2} & \\ & 1 & 3 & 1 & 0 & = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(x^3 + x^2 - 5x - 2\right) : (x-2) = x^2 + 3x + 1 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad 3x^2 - 5x \\ \quad \underline{-\left(3x^2 - 6x\right)} \\ \qquad x - 2 \\ \qquad \underline{-(x-2)} \end{array}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 + 3x + 1 = 0$ mit $p = 3$ und $q = 1$ wird

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0{,}38$

$x_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -2{,}62$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\,\vert\,-2) \quad P_{x1}(2\,\vert\,0)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle\vert\,0\right)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle\vert\,0\right)$

c) Die Wertetabelle:

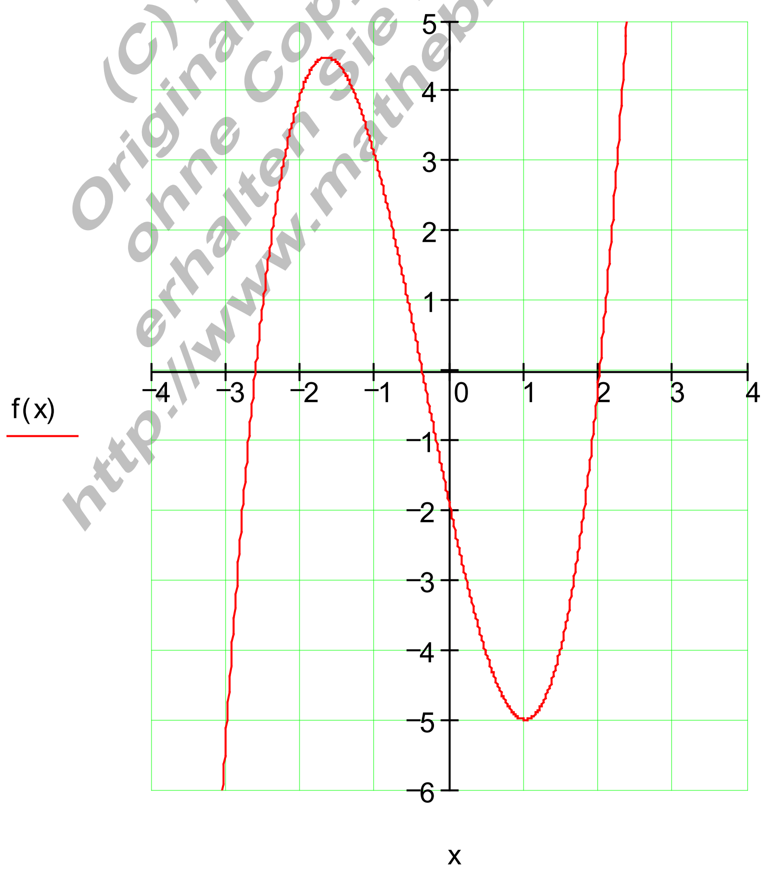
							P_y	
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5
f(x)	−5	1,13	4	4,38	3	0,63	−2	−4,13
	P_{min}		P_{x1}		P_{max}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1	1,5	2	2,5	$-1,\overline{6}$	−0,38	−2,62	
f(x)	−5	−3,88	0	7,38	4,48	0	0	

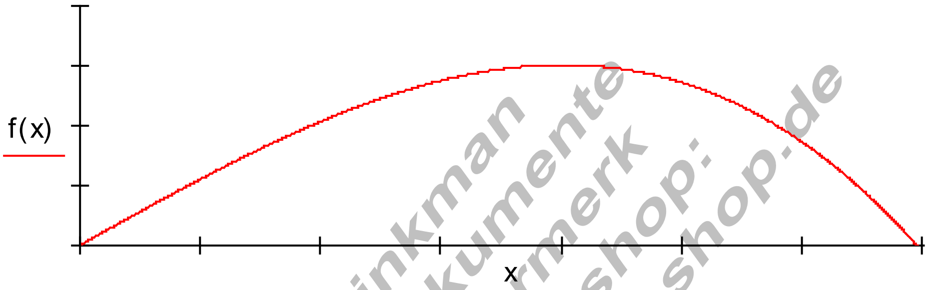
$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-3 & \downarrow & \underline{-3} & \underline{6} & \underline{-3} & \\ & 1 & -2 & 1 & -5 & =f(-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{2} & \underline{6} & \\ & 1 & -1 & -3 & 4 & =f(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{0} & \underline{5} & \\ & 1 & 0 & -5 & 3 & =f(-1) \end{array}$$

d)



<table>
<tr><td rowspan="3">4.</td><td colspan="2">Der Graph der Funktion f(x) ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf
$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \qquad \text{für } x > 0$
Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10 m
Eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m

</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>In einer Entfernung von 40 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe. Wie groß ist diese? (Achten Sie auf den Maßstab!)</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?</td></tr>
</table>

Zu 4a)

$$40\,m \mathrel{\hat{=}} x = 4 \Rightarrow y_{Max} = f(4) = -\frac{3}{64}\cdot 4^3 + \frac{9}{4}\cdot 4 = -\frac{3}{64}\cdot 64 + \frac{9}{4}\cdot 4 = -3 + 9 = 6$$

In einer Entfernung von 40 m vom Abwurfpunkt erreicht der Speer seine maximale Höhe von 6 m.

Zu 4 b)

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{48} \approx \pm 6{,}93$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 6{,}93$ bedeutet 69,3 m

Der Speer kommt 69,3 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

Viel Erfolg