Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 18.3.09**
SG28D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$
   a) Berechnen Sie die Nullstellen.
   b) Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
   c) Wie ist der Verlauf des Graphen?
   d) Machen Sie eine Aussage über die Funktionswerte für große und für Kleine x – Werte. (d.h. für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$)

Lösung:

6 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = -\frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Nullstellen: $\underline{\underline{x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -\frac{3}{2}}}$

2 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

2 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

2 Punkte

d) für $x \to \infty$ wird $f(x) \to \infty$

für $x \to -\infty$ wird $f(x) \to -\infty$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$
   a) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
   b) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
   c) Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	–7,38		3,88		4,13		–0,63		–4,38		–1,13	

   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Dabei sei $P_{max}(-1|5)$ ein Hochpunkt und $P_{min}\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{121}{27}\right)$ ein Tiefpunkt.

Lösung:
2 Punkte

a)	Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

8 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=1 & \downarrow & 1 & 0 & -5 & \\
 & 1 & 0 & -5 & -3 & = f(1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=2 & \downarrow & 2 & 2 & -6 & \\
 & 1 & 1 & -3 & -4 & = f(2) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-1 & \downarrow & -1 & 2 & 3 & \\
 & 1 & -2 & -3 & 5 & = f(-1) \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 2 & \\
x=-2 & \downarrow & -2 & 6 & -2 & \\
 & 1 & -3 & 1 & 0 & = f(-2)
\end{array}$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{aligned}
&(x^3 - x^2 - 5x + 2) : (x + 2) = x^2 - 3x + 1 \\
&\underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
&\quad -3x^2 - 5x \\
&\quad \underline{-(-3x^2 - 6x)} \\
&\qquad x + 2 \\
&\qquad \underline{-(x + 2)}
\end{aligned}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ mit $p = -3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2{,}62$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0{,}38$$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|2)$ $P_{x1}(-2|0)$

$P_{x2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

$P_{x2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\,\middle|\,0\right)$

3 Punkte

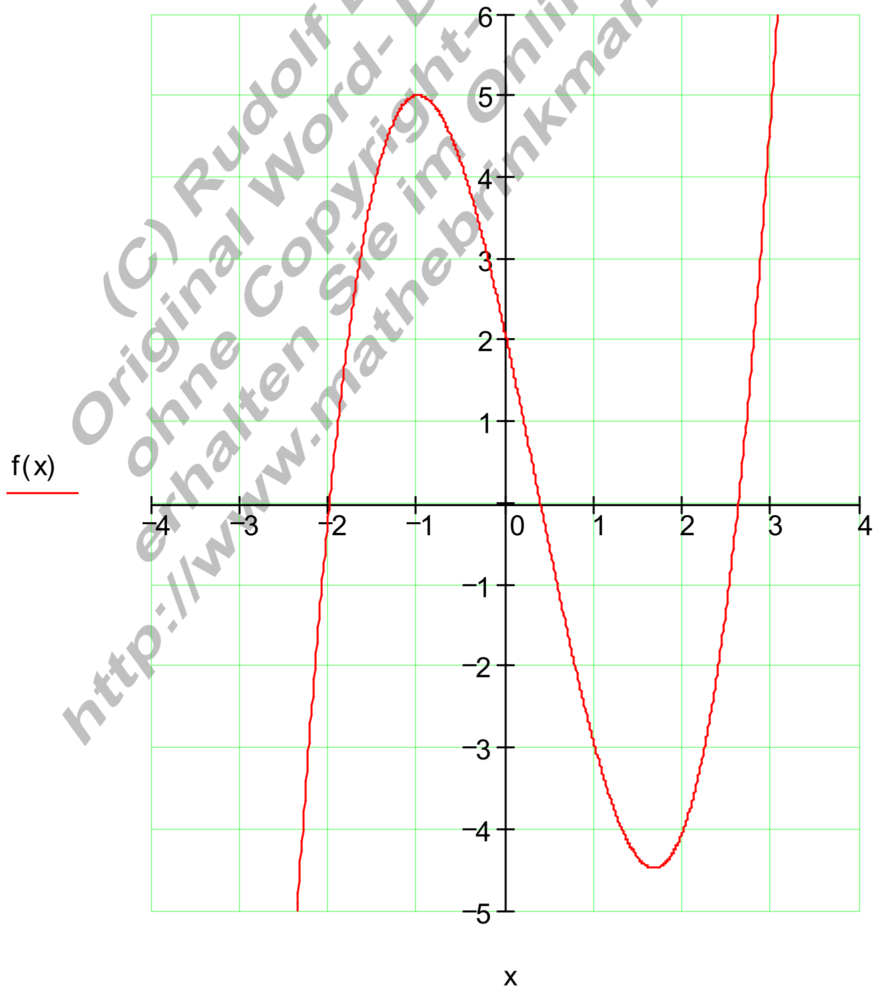
c) Die Wertetabelle:

		P_{x1}		P_{max}		P_y		
x	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−7,38	0	3,88	5	4,13	2	−0,63	−3
					P_{min}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1,5	2	2,5	3	$1,\overline{6}$	2,62	0,38	
f(x)	−4,38	−4	−1,13	5	−4.48	0	0	

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & -1 & -5 & 2 & \\ x=3 & \downarrow & \underline{3} & \underline{6} & \underline{3} & \\ & 1 & 2 & 1 & 5 & =f(3) \end{array}$$

5 Punkte

d)



3. Gegeben sind die Punkte $P_1(2\,|\,-4)$; $P_2(4\,|\,0)$; $P_3(6\,|\,4)$; $P_4(8\,|\,-4)$
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   b) Tragen Sie die aus den gegebenen Punkten bekannten Werte in eine Wertetabelle und bestimmen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte: $x \in \{\, 0 \,;\, 1 \,;\, 3 \,;\, 5 \,;\, 7 \,\}$
   c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Tiefpunkt: $P_1(2\,|\,-4)$ Hochpunkt: $P_3(6\,|\,4)$

Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

12 Punkte

a)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2\,|\,-4) \Rightarrow \quad f(2) = \quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_2(4\,|\,0) \Rightarrow \quad f(4) = \quad 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_3(6\,|\,4) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(8\,|\,-4) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	–4	
1	4	16	64	0	II – I
1	6	36	216	4	III – I
1	8	64	512	–4	IV – I
1	2	4	8	–4	
0	2	12	56	4	$\|:2$
0	4	32	208	8	$\|:4$
0	6	60	504	0	$\|:6$
1	2	4	8	–4	
0	1	6	28	2	
0	1	8	52	2	III – II
0	1	10	84	0	IV – II
1	2	4	8	–4	
0	1	6	28	2	
0	0	2	24	0	
0	0	4	56	–2	$\|:2$
1	2	4	8	–4	
0	1	6	28	2	
0	0	2	24	0	
0	0	2	28	–1	IV – III
1	2	4	8	–4	
0	1	6	28	2	
0	0	1	12	0	
0	0	0	4	–1	

$$4a_3 = -1 \,|:4$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2 - 3 = 0 \,|+3$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$a_1 + 6a_2 + 28a_3 = 2$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 18 - 7 = 2 \,|-11$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -4$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 18 + 12 - 2 = -4 \,|+8$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 4$$

4 Punkte

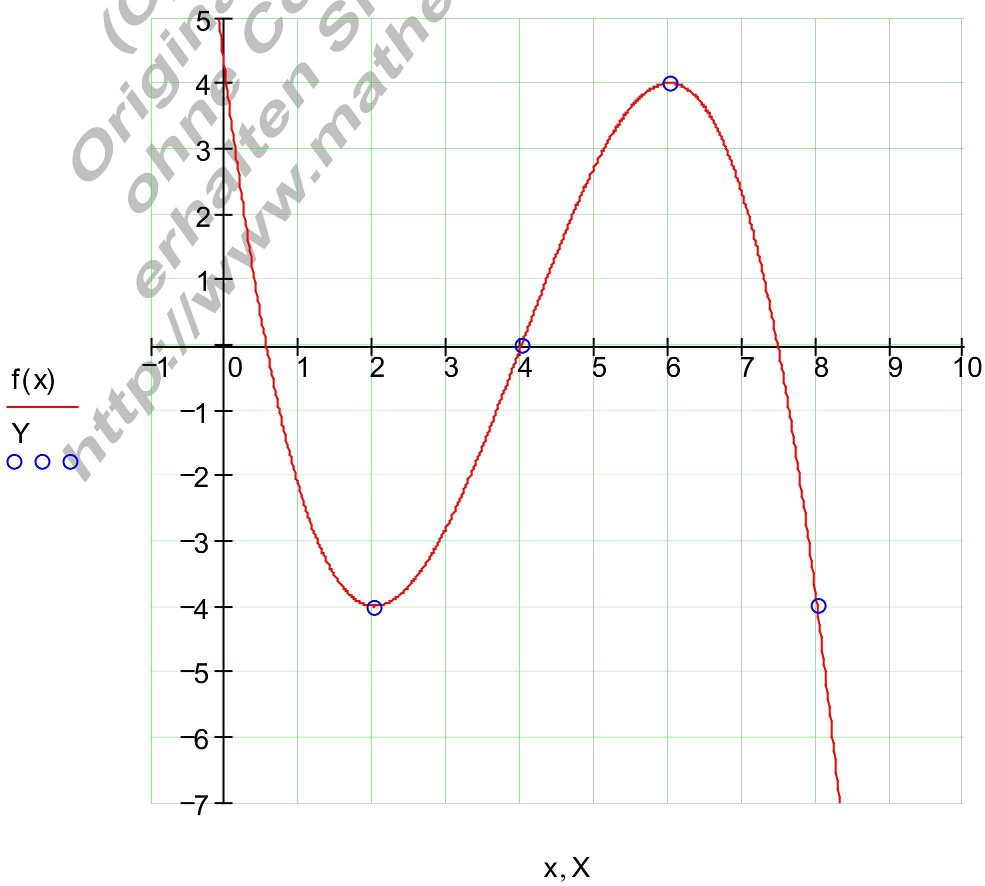
b)

			P_1 TP		P_2		P_3 HP		P_4
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	4	–2,25	–4	–2,75	0	2,75	4	2,25	–4

	$-1/4$	3	-9	4	
$x=1$	$\downarrow$	$-1/4$	$11/4$	$-25/4$	
	$-1/4$	$11/4$	$-25/4$	$-9/4$	$=f(1)=-2,25$
	$-1/4$	3	-9	4	
$x=3$	$\downarrow$	$-3/4$	$27/4$	$-27/4$	
	$-1/4$	$9/4$	$-9/4$	$-11/4$	$=f(3)=-2,75$
	$-1/4$	3	-9	4	
$x=5$	$\downarrow$	$-5/4$	$35/4$	$-5/4$	
	$-1/4$	$7/4$	$-1/4$	$11/4$	$=f(5)=2,75$
	$-1/4$	3	-9	4	
$x=7$	$\downarrow$	$-7/4$	$35/4$	$-7/4$	
	$-1/4$	$5/4$	$-1/4$	$9/4$	$=f(7)=2,25$

4 Punkte

c)



Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 18.3.09
SG28D Gruppe B	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$
   a) Berechnen Sie die Nullstellen.
   b) Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
   c) Wie ist der Verlauf des Graphen?
   d) Machen Sie eine Aussage über die Funktionswerte für große und für Kleine x – Werte. $(\text{d.h. für } x \to \infty \text{ und für } x \to -\infty)$

6 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = \frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2 \end{array} \right.$$

$$\text{Nullstellen: } \underline{\underline{x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = -2}}$$

2 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

2 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III → I

2 Punkte

d) für $x \to \infty$ wird $f(x) \to \infty$

für $x \to -\infty$ wird $f(x) \to -\infty$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$
   a) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
   b) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
   c) Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)		1,13		4,38		0,63		–4,13		–3,88		7,38

   d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Dabei sei $P_{min}(1|-5)$ ein Tiefpunkt und $P_{max}\left(-\frac{5}{3}|\frac{121}{27}\right)$ ein Hochpunkt.

2 Punkte

a)	Der Graph von f(x) hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III → I

8 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{2} & \underline{-3} & \\ & 1 & 2 & -3 & -5 & = f(1) \\ \hline & 1 & 2 & -5 & -2 & \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{6} & \underline{2} & \\ & 1 & 3 & 1 & 0 & = f(2) \end{array}$$

$x^2 + 3x + 1 = 0$

oder über Polynomdivision:

$$\begin{aligned} &\left(x^3 + x^2 - 5x - 2\right) : (x-2) = x^2 + 3x + 1 \\ &\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ &\quad 3x^2 - 5x \\ &\quad \underline{-\left(3x^2 - 6x\right)} \\ &\qquad x - 2 \\ &\qquad \underline{-(x-2)} \end{aligned}$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 + 3x + 1 = 0$ mit $p = 3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0{,}38 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -2{,}62 \end{array} \right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$P_y(0|-2) \quad P_{x1}(2|0)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\,|\,0\right)$

$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\,|\,0\right)$

3 Punkte

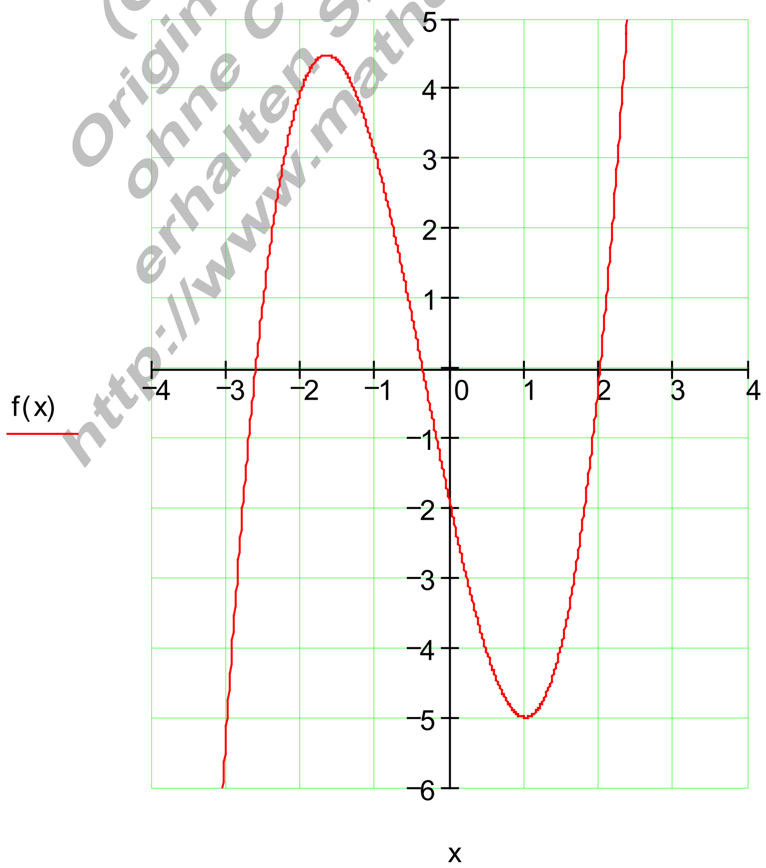
c) Die Wertetabelle:

							P_y	
x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5
f(x)	–5	1,13	4	4,38	3	0,63	–2	–4,13
	P_{min}		P_{x1}		P_{max}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1	1,5	2	2,5	$-1,\overline{6}$	–0,38	–2,62	
f(x)	–5	–3,88	0	7,38	4,48	0	0	

$$\begin{array}{lccccl} & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-3 & \downarrow & \underline{-3} & \underline{6} & \underline{-3} & \\ & 1 & -2 & 1 & -5 & =f(-3) \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{2} & \underline{6} & \\ & 1 & -1 & -3 & 4 & =f(-2) \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -2 & \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{0} & \underline{5} & \\ & 1 & 0 & -5 & 3 & =f(-1) \end{array}$$

5 Punkte

d)



3. Gegeben sind die Punkte $P_1(2\,|\,4)$; $P_2(4\,|\,0)$; $P_3(6\,|\,-4)$; $P_4(8\,|\,4)$
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   b) Tragen Sie die aus den gegebenen Punkten bekannten Werte in eine Wertetabelle und bestimmen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte: $x \in \{ 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 7 \}$
   c) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Hochpunkt: $P_1(2\,|\,4)$ Tiefpunkt: $P_3(6\,|\,-4)$

   Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 4$

12 Punkte

a)

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(2\,|\,4) \Rightarrow \quad f(2) = \quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(4\,|\,0) \Rightarrow \quad f(4) = \quad 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 0$

$P_3(6\,|\,-4) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = -4$

$P_4(8\,|\,4) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	4	
1	4	16	64	0	II − I
1	6	36	216	−4	III − I
1	8	64	512	4	IV − I
1	2	4	8	4	
0	2	12	56	−4	|: 2
0	4	32	208	−8	|: 4
0	6	60	504	0	|: 6
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	−2	
0	1	8	52	−2	III − II
0	1	10	84	0	IV − II
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	−2	
0	0	2	24	0	
0	0	4	56	2	IV − 2·III
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	−2	
0	0	2	24	0	
0	0	0	8	2	

$8a_3 = 2 \,|\, :8$

$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{4}}$

$2a_2 + 24a_3 = 0$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 0 \,|\, -6$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -6 \,|\, :2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -3}$

$a_1 + 6a_2 + 28a_3 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2 \,|\, +11$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + 18 - 12 + 2 = 4 \,|\, -8$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 4$$

4 Punkte

b)

			P_1 HP		P_2		P_3 TP		P_4
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	–4	2,25	4	2,75	0	–2,75	–4	–2,25	4

$$\begin{array}{llllll} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1/4} & \underline{-11/4} & \underline{25/4} & \\ & 1/4 & -11/4 & 25/4 & 9/4 & = f(1) = 2{,}25 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=3 & \downarrow & \underline{3/4} & \underline{-27/4} & \underline{27/4} & \\ & 1/4 & -9/4 & 9/4 & 11/4 & = f(3) = 2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=5 & \downarrow & \underline{5/4} & \underline{-35/4} & \underline{5/4} & \\ & 1/4 & -7/4 & 1/4 & -11/4 & = f(5) = -2{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} & 1/4 & -3 & 9 & -4 & \\ x=7 & \downarrow & \underline{7/4} & \underline{-35/4} & \underline{7/4} & \\ & 1/4 & -5/4 & 1/4 & -9/4 & = f(7) = -2{,}25 \end{array}$$

4 Punkte

c)