

Klassenarbeit für Nachschreiber SG28 D	Mathematik NAME:	Bearbeitungszeit 90 min.
---	-----------------------------------	---------------------------------

Hilfsmittel: Taschenrechner

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$
a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
b)	Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
c)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall $I \in [-2; 6]$ (d. h. x- Werte von -2 bis 6)
d)	Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.

A1	Ausführliche Lösung
a)	<p>Die Achsenschnittpunkte von: $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$</p> <p>Schnittpunkt mit der y - Achse:</p> $f(0) = \frac{5}{2} \Rightarrow P_y \left(0 \mid \frac{5}{2} \right)$ <p>Schnittpunkte mit der x - Achse (Nullstellen):</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$ $\Rightarrow p = -4; q = -5 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = 4 + 5 = 9$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ x_2 = 2 - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{P_{x1}(5 0)}} \\ \underline{\underline{P_{x2}(-1 0)}} \end{array}$

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>b) Scheitelpunktbestimmung :</p> <p>1. Verfahren über die Nullstellen:</p> $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{S\left(2 \mid \frac{9}{2}\right)}}$ $y_s = f(x_s) = f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$ <p>Funktionsgleichung:</p> $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}}}$ <p>Scheitelpunktbestimmung :</p> <p>2. Verfahren durch quadratische Ergänzung:</p> $f(x) = -\frac{1}{2} \left[x^2 - 4x - 5 \right] = -\frac{1}{2} \left[\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\text{2. binomische Formel}} - 2^2 - 5 \right]$ $= -\frac{1}{2} \left[(x-2)^2 - 9 \right] = -\frac{1}{2} (x-2)^2 + \frac{9}{2}$
----	--

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>c)</p> $f(x) := -\frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + 4.5$ <p style="text-align: center;">x</p>
----	---

A1	Ausführliche Lösung
d)	<p>$f(x)$ entsteht aus der Normalparabel durch folgende Umformungen:</p> <p>--- Spiegelung an der x-Achse: $x^2 \mapsto -x^2$</p> <p>--- Stauchung mit dem Formfaktor $\frac{1}{2}$: $-x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2$</p> <p>--- Verschiebung um $\frac{9}{2}$ LE nach oben: $-\frac{1}{2}x^2 \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$</p> <p>--- Verschiebung um 2 LE nach rechts: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2} = f(x)$</p>

2.	<p>Der Kraftstoffverbrauch eines PKW hängt bekanntlich von der Geschwindigkeit ab. Durch Messungen wurde der funktionale Zusammenhang ermittelt. Es gilt: $K(v) = 0,002v^2 - 0,18v + 8,55$ für $v > 40$ Dabei bedeuten: $K(v)$ der Kraftstoffverbrauch in Liter/100 km und v die Geschwindigkeit in km/h.</p>
a)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 7 Liter auf 100 km?
b)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?

A2	Ausführliche Lösung
a)	<p>$K(v) = 0,002v^2 - 0,18v + 8,55$ für $v > 40$</p> <p>$K(v) = 7 \Leftrightarrow 0,002v^2 - 0,18v + 8,55 = 7 \Leftrightarrow v^2 - 90v + 775 = 0$</p> <p>$p = -90$; $q = 775 \Rightarrow D = 1250$</p> <p>$v_1 = 45 + \sqrt{1250} \approx 80,36$</p> <p>$v_2 = 45 - \sqrt{1250} \approx 9,6$ scheidet aus wegen $v > 40$</p> <p>Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.</p>

A2	Ausführliche Lösung
b)	<p>Scheitelpunkt ist Minimum</p> $v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{45 + \sqrt{1250} + 45 - \sqrt{1250}}{2} = \underline{\underline{45}}$ <p>$K(45) = 0,002 \cdot 45^2 - 0,18 \cdot 45 + 8,55 = \underline{\underline{4,5}}$</p> <p>Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.</p>

3.	Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$
a)	Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Parabeln.
b)	Berechnen Sie die Gleichung der Geraden $h(x)$, die beide Schnittpunkte miteinander verbindet.
c)	Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem. Hilfestellung: Die Scheitelpunkte beider Parabeln sind: $f(x) \Rightarrow S_p(2 -3)$ und $g(x) \Rightarrow S_p(0 1)$

A3	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ Ansatz: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \quad +x^2$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 2x + 1 \quad -2x$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 1 \quad -1$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \quad :2$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ q. E. $\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \sqrt{\quad}$ $\Leftrightarrow \left x - \frac{3}{2}\right = \frac{3}{2}$ Fall I: $x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ Fall II: $x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 0$ $y_1 = f(x_1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$ $y_2 = f(x_2) = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$ Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P_1(3 -2)$ und $P_2(0 1)$

A3	Ausführliche Lösung
b)	$P_1(3 -2); P_2(0 1)$ $h(x) = a_1x + a_0$ $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{0 - 3} = \frac{1 + 2}{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow h(x) = -x + a_0$ $P_2(0 1) \Rightarrow h(0) = 1 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 1 \Leftrightarrow a_0 = 1$ $\Rightarrow h(x) = -x + 1$

