Klassenarbeit	**Mathematik Bearbeitungszeit 90 min.**
SG27D für Nachschreiber	**NAME: Ausführliche Lösungen**

Hilfsmittel: Taschenrechner
Rechnen Sie wo möglich mit Brüchen.
Bei auftretenden Wurzeln genügt eine Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma. Jedes Ergebnis ist durch Rechnung zu begründen.

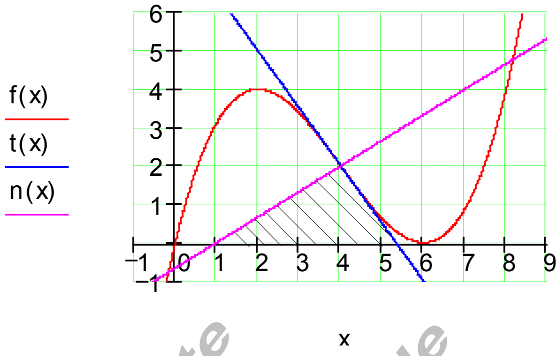
1.	Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx$

E1	Ergebnis
	$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}=\underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

2. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, welches durch die Tangente t(x) und der Normalen n(x) mit der x- Achse gebildet wird.

$t(x)$ ist die Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(4|2)$

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$



A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$ Tangente durch $P(4|2)\Rightarrow x_0=4$

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f(x_0)=f(4)=2\,;\,f'(x_0)=f'(4)=-\frac{3}{2}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x-4)+2=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+8}}$$

$$n(x)=\frac{2}{3}(x-4)+2=\underline{\underline{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}}$$

Schnittpunkt der Tangente mit der x – Achse :

$$t(x)=0\Leftrightarrow x_t=\frac{16}{3}$$

Schnittpunkt der Normalen mit der x – Achse :

$$n(x)=0\Leftrightarrow x_n=1$$

Dreieckfläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ mit $g=x_t-x_n=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3}$

und $h=2\Rightarrow A=\frac{\frac{13}{3}\cdot 2}{2}=\underline{\underline{\frac{13}{3}\text{ FE}}}$

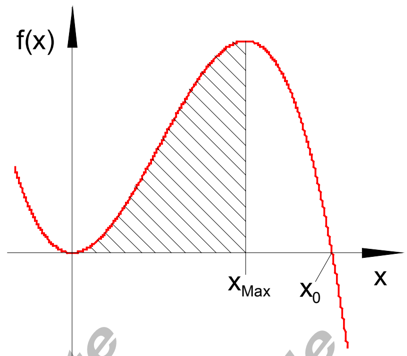
3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.

b) Berechnen Sie die Extrempunkte.

c) Berechnen Sie die gekennzeichnete Fläche.



A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \text{Schnittpunkt mit der y-Achse}: P_y(0\,|\,0)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{2} \,|\cdot 4 \Leftrightarrow x_3 = 6$$

$$\text{Schnittpunkte mit der x-Achse}: P_{x1/2}(0\,|\,0); P_{x3}(6\,|\,0)$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 \,|\cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } P_{Min}(0\,|\,0)$$

$$f(x_2) = f(4) = -16 + 24 = 8 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } P_{Max}(4\,|\,8)$$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \qquad A = \left|\int_0^4 f(x)\,dx\right|$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^4 = -16 + 32 = 16$$

$$A = 16\,\text{FE}$$

4. Eine zur y- Achse symmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades verläuft durch die Punkte: $P_1(0\,|\,8)\,;P_2\left(1\,\middle|\,\frac{57}{10}\right);P_3\left(4\,\middle|\,-\frac{24}{5}\right)$

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.
Zur Kontrolle
$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8$

b) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

c) Berechnen Sie die Extrempunkte und den Wendepunkt.

d) Skizzieren Sie den Graphen.

e) Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

A4 Ausführliche Lösung

a) Die Funktionsgleichung:

Aus der Symmetrieangabe folgt: $f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$

$P_1(0\,|\,8)\Rightarrow f(0)=\boxed{a_0=8}$

$P_2(1\,|\,57/10)\Rightarrow f(1)=1a_4+1a_2+8=57/10$

$P_3(4\,|\,-24/5)\Rightarrow f(4)=256a_4+16a_2+8=-24/5$

Es bleiben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten übrig.

$1a_4+1a_2=-\frac{23}{10}$

$256a_4+16a_2=-\frac{64}{5}$

a_4	a_2		
1	2	$-\frac{23}{10}$	$\vert\cdot 10$
256	16	$-\frac{64}{5}$	$\vert\cdot 5$
10	10	-23	
1280	80	-64	$II-128\cdot I$
10	10	-23	
0	-1200	2880	

$-1200a_2=2880\Leftrightarrow\boxed{a_2=-\frac{12}{5}}$

$10a_4+10a_2=-23$

$\Leftrightarrow 10a_4-24=-23\Leftrightarrow\boxed{a_4=\frac{1}{10}}$

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8$$

A4 Ausführliche Lösung

b)

$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$ Achsenschnittpunkte

$P_y:\ f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,8)}}$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8 = 0 | \cdot 10$

$\Leftrightarrow x^4 - 24x^2 + 80 = 0$ Substitution $z = x^2$

$\Leftrightarrow z^2 - 24z + 80 = 0 \Rightarrow z_1 = 20$ bzw. $z_2 = 4$

Nach Rücksubstitution

$x_{1/2} = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4{,}47$ bzw. $x_{2/3} = \pm 2$

$P_{x1}\left(\sqrt{20}\,|\,0\right);\ P_{x2}\left(-\sqrt{20}\,|\,0\right);\ P_{x3}(2\,|\,0);\ P_{x4}(-2\,|\,0);$

A4 Ausführliche Lösung

c) Extrempunkte und Wendepunkte

$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{24}{5}x \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{24}{5} \Rightarrow f'''(x) = \frac{12}{5}x$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x^3 - \frac{24}{5}x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 12\right) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ bzw. $x_{2/3} = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3{,}46$

$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{24}{5} < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_1 = 0$

$f''(x_{2/3}) = f''\left(\pm\sqrt{12}\right) = \frac{48}{5} > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_{1/2} = \pm\sqrt{12}$

Die y – Koordinaten

$f(x_1) = f(0) = 8 \Rightarrow P_{max}(0\,|\,8)$

$f(x_{2/3}) = f\left(\pm\sqrt{12}\right) = -6{,}4 \Rightarrow P_{min1/2}\left(\pm\sqrt{12} \approx \pm 3{,}46\,|\,-6{,}4\right)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x^2 - \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$f'''(x_1) = f'''(2) = \frac{24}{5} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1 = 2$

$f'''(x_2) = f'''(-2) = -\frac{24}{5} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2 = -2$

Die y – Koordinaten

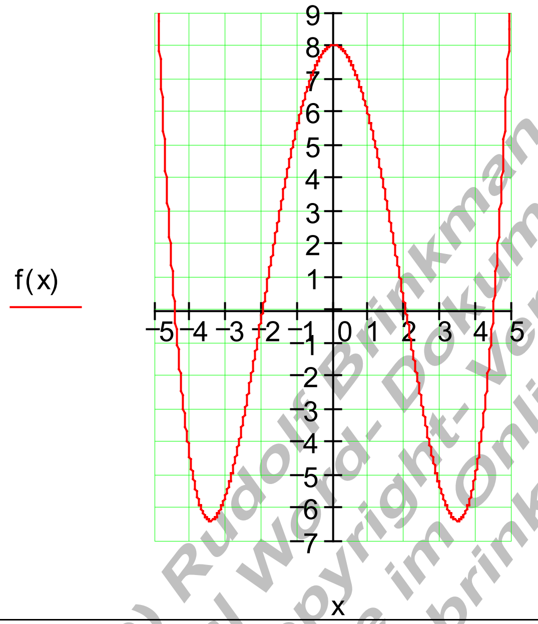
$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = 0 \Rightarrow P_{w1}(2\,|\,0);\ P_{w2}(-2\,|\,0)$

A4 Ausführliche Lösung

d) Wertetabelle:

x	0	1	2	3,46	4	4,87
f(x)	8	5,7	0	−6,4	−4,8	0

Da die Funktion achsensymmetrisch ist gilt $f(-x) = f(x)$



A4 Ausführliche Lösung

e) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8\right)dx = \left[\frac{1}{50}x^5 - \frac{4}{5}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{50}\cdot 2^5 - \frac{4}{5}\cdot 2^3 + 8\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{50}\cdot(-2)^5 - \frac{4}{5}\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2)\right)\right] = 20{,}48$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 20{,}48$$