Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 5.12.07**
SG26D Gruppe A	**NAME:**		

1. Berechnen Sie das Integral $\int_1^3 (x-1)^5\,dx$

Zu 1.	$\int_1^3 (x-1)^5\,dx$ Substitution: $u(x) = x-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$ untere Grenze : $u(1) = 1-1 = 0$ obere Grenze : $u(3) = 3-1 = 2$ $\int_1^3 (x-1)^5\,dx = \int_0^2 u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 \Big\vert_0^2 = \frac{1}{6}\cdot 2^6 - \frac{1}{6}\cdot 0^6 = \frac{2^6}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ $\int_1^3 (x-1)^5\,dx = \frac{32}{3} \approx 10{,}667$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$

Bestimmen Sie die Extremwerte und berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden. Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

Zu 2. Extremwerte

$f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$ ist symmetrisch zur y – Achse $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$f'(x) = 5x^3 - 6x \,;\, f''(x) = 15x^2 - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(5x^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_1) = f''(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_1 = 0$

$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f(x_1) = f(0) = -8 \Rightarrow P_{Max}\,(0 \mid -8)$

$f(x_{2/3}) = f\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 - 3\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 8 = -\frac{49}{5}$ wegen $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1 \;\middle|\; -\frac{49}{5} = -9{,}8\right);\, P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1 \;\middle|\; -\frac{49}{5} = -9{,}8\right)$

Flächenberechnung

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0 \mid \cdot\frac{4}{5} \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5};\, q=-\frac{32}{5}$

$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

Flächenintegral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx=\left.\frac{x^5}{4}-x^3-8x\right|_{-2}^{2}$$

$$=\frac{2^5}{4}-2^3-8\cdot 2-\left[\frac{(-2)^5}{4}-(-2)^3-8\cdot(-2)\right]=\frac{32}{4}-8-16-\left[-\frac{32}{4}-(-8)+16\right]$$

$$=8-8-16-(-8+8+16)=-16-(16)=-32$$

Die Fläche: $A=\left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx\right|=|-32|=32\,\text{FE}$

Da das Ergebnis der Integration negativ ist, liegt der Graph von f unterhalb der x- Achse.

3. Gegeben sind die Funktionen f und g mit:
   $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 1$
   a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen.
   b) Wie liegen die Graphen zueinander?
   c) Skizzieren Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Fläche.

Zu 3.

a) Fläche zwischen den Funktionsgraphen

Die x- Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen bilden die Integrationsgrenzen.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \left(-x^2 + 4x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x - 4x + 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \,|\!:2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ sind die Integrationsgrenzen.

Ansatz: $\int_0^3 \left[f(x) - g(x)\right] dx$ mit $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ wird:

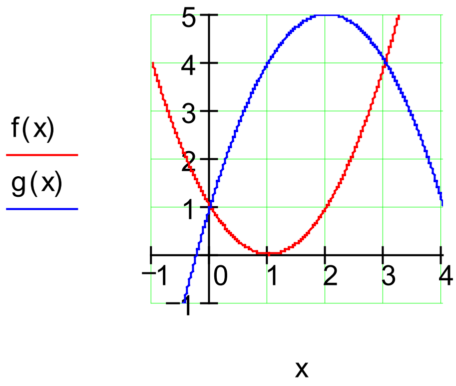
$$\int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

Da es sich bei einer Fläche zwischen zwei Graphen stets um eine physikalische Fläche handelt, muss das Ergebnis positiv sein. Das erreichen wir durch Betragsbildung.

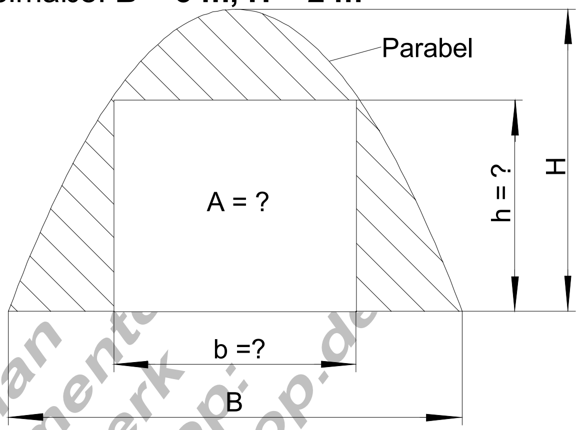
$$A = \left|\int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx\right| = |-9| = 9\,FE$$

b) Das negative Ergebnis der Integration bedeutet, dass der Graph von f(x) unterhalb des Graphen von g(x) liegt.

c)



4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 3 m, H = 2 m**



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird?
Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle :

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden.
Wie groß ist diese Fläche?

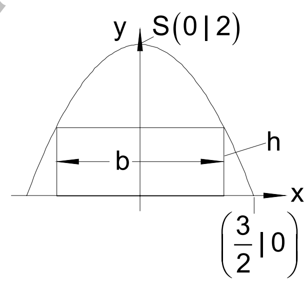
a) $B = 3\,m \qquad H = 2\,m$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$$f(x) = a_2x^2 + 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4}a_2 + 2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{8}{9}$$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2}}$



$$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{b^2}{4} + 2 = -\frac{2}{9}b^2 + 2$$

$$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{2}{9}b^2 + 2\right) = -\frac{2}{9}b^3 + 2b$$

$$A'(b) = -\frac{2}{3}b^2 + 2 \qquad A''(b) = -\frac{4}{3}b$$

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}b^2 = 2 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$A''(b) = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } b = \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Fensterbreite} = \sqrt{3}\,m \approx 1{,}732\,m}}$$

$$h(b) = -\frac{2}{9}b^2 + 2 \Rightarrow h\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9} \cdot 3 + 2 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Fensterhöhe} = \frac{4}{3}\,m = 1{,}\overline{3}\,m}}$$

$$\text{Fensterfläche} = b \cdot h = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{2{,}309\,m^2}}$$

b)	$\text{Restfläche} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$ $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ $= -\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} + 2\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{8} - 2\cdot\frac{3}{2}\right) = -1+3-1+3 = 6-2 = 4$ $\text{Restfläche} = 4\,m^2 - \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{1{,}691 m^2}}$

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 5.12.07**
SG26D Gruppe B	**NAME:**		

1. Berechnen Sie das Integral $\int\limits_{-2}^{0}(x+1)^5\,dx$

Zu 1.	$\int\limits_{-2}^{0}(x+1)^5\,dx$ Substitution: $u(x)=x+1\Rightarrow\frac{du}{dx}=1\Leftrightarrow dx=du$ untere Grenze : $u(-2)=-2+1=-1$ obere Grenze : $u(0)=0+1=1$ $\int\limits_{-2}^{0}(x+1)^5\,dx=\int\limits_{-1}^{1}u^5\,du=\frac{1}{6}u^6\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{1}{6}\cdot 1^6-\frac{1}{6}\cdot(-1)^6=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$ $\int\limits_{-2}^{0}(x+1)^5\,dx=0$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 + 8$

Bestimmen Sie die Extremwerte und berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, wobei die Nullstellen die Integrationsgrenzen bilden. Wie liegt der Graph in Bezug auf die x- Achse?

Zu 2. Extremwerte

$f(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 + 8$ ist symmetrisch zur y – Achse $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$f'(x) = -5x^3 + 6x\,;\, f''(x) = -15x^2 + 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^3 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(-5x^2 + 6\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_1) = f''(0) = -15 \cdot 0^2 + 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_1 = 0$

$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = -15 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 + 6 = -15 \cdot \frac{6}{5} + 6 = -12 < 0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = -15 \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 + 6 = -15 \cdot \frac{6}{5} + 6 = -12 < 0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f(x_1) = f(0) = 8 \Rightarrow P_{Min}(0\,|\,8)$

$f(x_{2/3}) = f\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = -\frac{5}{4}\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 + 3\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 + 8 = \frac{49}{5}$ wegen $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow P_{Max\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \approx -1{,}1 \,\middle|\, \frac{49}{5} = 9{,}8\right); P_{Max\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1 \,\middle|\, \frac{49}{5} = 9{,}8\right)$

Flächenberechnung

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^4+3x^2+8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$\Rightarrow -\frac{5}{4}z^2+3z+8=0 \,|\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5};\, q=-\frac{32}{5}$

$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$

$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5} \end{array} \right.$

$\Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

Flächenintegral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx=-\frac{x^5}{4}+x^3+8x\Big|_{-2}^{2}$$

$$=-\frac{2^5}{4}+2^3+8\cdot 2-\left[-\frac{(-2)^5}{4}+(-2)^3+8\cdot(-2)\right]=-\frac{32}{4}+8+16-\left[\frac{32}{4}+(-8)-16\right]$$

$$=-8+8+16-(8-8-16)=16-(-16)=32$$

Die Fläche: $A=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{5}{4}x^4+3x^2+8\right)dx=32\,\text{FE}$

Da das Ergebnis der Integration positiv ist, liegt der Graph von f oberhalb der x- Achse.

3. Gegeben sind die Funktionen f und g mit:
   $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$
   a) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen.
   b) Wie liegen die Graphen zueinander?
   c) Skizzieren Sie beide Graphen in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Fläche.

Zu 3.

a) Fläche zwischen den Funktionsgraphen

Die x- Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen bilden die Integrationsgrenzen.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ mit $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 1 - (x^2 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - x^2 - 4x - 2x + 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 6x = 0 \,|: (-2)$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -3$ sind die Integrationsgrenzen.

Ansatz: $\int_{-3}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx$ mit $f(x) - g(x) = -2x^2 - 6x$ wird:

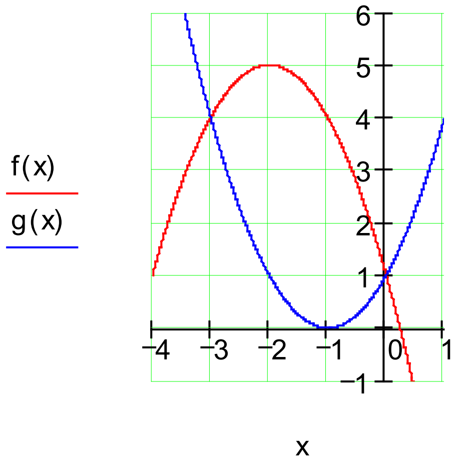
$$\int_{-3}^{0} (-2x^2 - 6x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} = -\frac{2}{3}\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 - \left[-\frac{2}{3}(-3)^3 - 3(-3)^2\right]$$

$$= 0 - \left[-\frac{2}{3}(-27) - 3\cdot 9\right] = -(18 - 27) = -(-9) = \underline{\underline{9}}$$

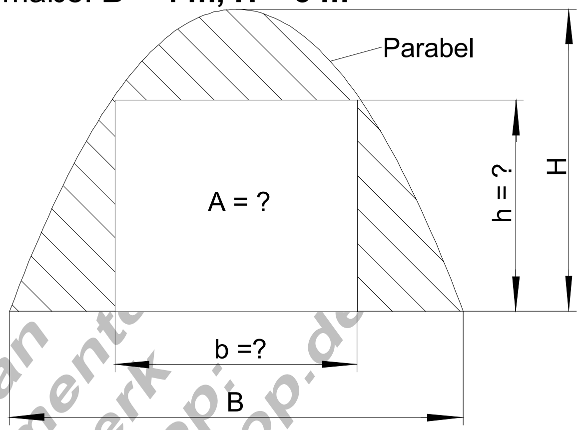
$$A = \int_{0}^{3} (2x^2 - 6x)\,dx = 9\text{ FE}$$

b) Das positive Ergebnis der Integration bedeutet, dass der Graph von f(x) oberhalb des Graphen von g(x) liegt.

c)



4. In einer parabelförmigen Giebelwand soll ein rechteckiges Fenster eingelassen werden, das bis zum Boden reicht. Giebelmaße: **B = 4 m, H = 3 m**



a) Welche Maße muss das Fenster haben (Breite und Höhe), damit die Fensterfläche maximal wird? Wie groß ist die Fensterfläche?

Zwischenwerte zur Kontrolle:

Funktionsgleichung der Parabel: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$

Fensterfläche als Funktion von b: $A(b) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

b) Die restliche Fläche der Giebelwand soll gestrichen werden. Wie groß ist diese Fläche?

a)

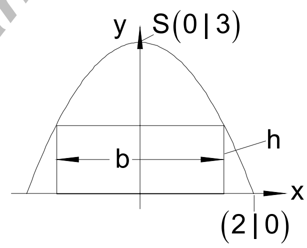
$B = 4\,\text{m} \qquad H = 3\,\text{m}$

Ansatz über die Scheitelpunktform:

$f(x) = a_2x^2 + 3$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 3 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}$

Funktionsgleichung: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3}}$



$A = b \cdot h \quad h(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{b^2}{4} + 3 = -\frac{3}{16}b^2 + 3$

$A(b) = b \cdot h(b) = b \cdot \left(-\frac{3}{16}b^2 + 2\right) = -\frac{3}{16}b^3 + 3b$

$A'(b) = -\frac{9}{16}b^2 + 3 \qquad A''(b) = -\frac{9}{8}b$

$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{16}b^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{16}b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow b_{1/2} = \pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$A''(b) = -\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Fensterbreite $= \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt{3}\,\text{m} \approx 2{,}309\,\text{m}}}$

$h(b) = -\frac{3}{16}b^2 + 3 \Rightarrow h\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{16}{9} \cdot 3 + 3 = 2$

Fensterhöhe $= \underline{\underline{2\,\text{m}}}$

Fensterfläche $= b \cdot h = \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot 2 = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3} \approx \underline{\underline{4{,}619\,\text{m}^2}}$

b)	$\text{Restfläche} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \text{Fensterfläche}$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^3+3x\right]_{-2}^{2}$ $= -\frac{1}{4}\cdot 8 + 3\cdot 2 - \left(\frac{1}{4}\cdot 8 - 3\cdot 2\right) = -2+6-2+6 = 12-4 = 8$ $\text{Restfläche} = 8\,m^2 - \frac{8}{3}\cdot\sqrt{3}\,m \approx \underline{\underline{3{,}381m^2}}$