Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 6.12.06**
SG26 D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

a) $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$ b) $\left(\frac{1}{2}x-2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$

c) Überprüfen Sie das Ergebnis von a) mit dem Wurzelsatz von Vieta.

E1:

a) $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0\,|:\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0 \quad\Rightarrow p=-1 \quad q=-2$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2}} \\ x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=\underline{\underline{-1}}\end{array}\right.$$

b) $\left(\frac{1}{2}x-2\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$$\frac{1}{2}x-2=0\,|+2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}x=2\,|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad x=4\Rightarrow \underline{\underline{x_1=4}}$$

$$\frac{3}{4}x+2=0\,|-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4}x=-2\,|:\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{2}{1}:\frac{3}{4}=-\frac{8}{3}\Rightarrow \underline{\underline{x_2=-\frac{8}{3}}}$$

c) $x_1=2$ und $x_2=-1$ $p=-1$ und $q=-2$

$$x_1+x_2=2+(-1)=2-1=1=-p\Rightarrow \underline{\underline{p=-1}}$$

$$x_1\cdot x_2=2\cdot(-1)=-2=q\Rightarrow \underline{\underline{q=-2}}$$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
d) Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.
e) Schreiben Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren.

E2:

a)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{5}{2}\right)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0 \mid \cdot(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \Rightarrow p = -4 \quad q = -5$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 5 = 9 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 + 3 = \underline{\underline{5}} \\ x_2 = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}} \end{array} \right. \quad \underline{\underline{P_{x1}(5 \mid 0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2}(-1 \mid 0)}}$$

b)

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

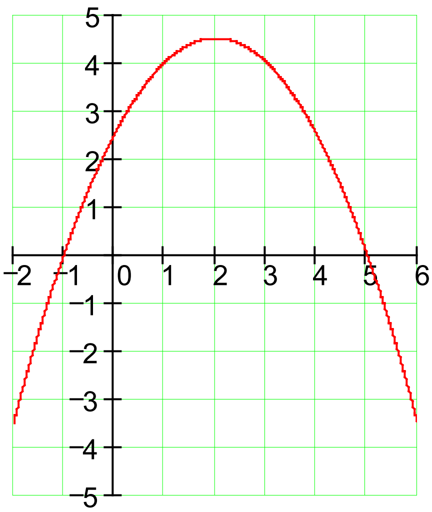
$$y_s = f(x_s) = f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + \frac{5}{2} = -2 + 4 + \frac{5}{2} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

Scheitelpunktkoordinaten: $\underline{\underline{S\left(2 \mid \frac{9}{2}\right)}}$

Scheitelpunktform: $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}}}$

c)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$$



d) Normalparabel gestaucht mit dem Formfaktor $a_2 = -\frac{1}{2}$, nach unten geöffnet.
Verschiebung in x- Richtung nach rechts um 2 Einheiten.
Verschiebung in y- Richtung um $\frac{9}{2}$ Einheiten nach oben.

e) Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren.
Mit $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$ und $a_2 = -\frac{1}{2}$ wird $\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}(x-5)(x+1)}}$

3. Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:
   $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8$ für $v > 40$
   a) Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h.
   b) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 8 Liter auf 100 km?
   c) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau?
   (Hinweis: Die Funktionsgleichung b(v) ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 6,25). Nutzen Sie diesen Hinweis.)
   Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz..

E3:

a) $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8$ für $v > 40$

$$b(140) = 0{,}0005 \cdot 140^2 - 0{,}05 \cdot 140 + 8 = \underline{\underline{10{,}8}}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h beträgt der Benzinverbrauch 10,8 Liter auf 100 km.

b) $b(v) = 8 \Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 8 = 8 \,|-8$

$$\Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v = 0 \Leftrightarrow v(0{,}0005v - 0{,}05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40 \text{ scheidet aus}$$

$$0{,}0005v - 0{,}05 = 0 \,|+0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}0005v = 0{,}05 \,|:0{,}0005 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = \frac{0{,}05}{0{,}0005} = 100}}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 8 Liter auf 100 km.

c) Beim Graphen von b(v) handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 6,75). Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch.
Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 6,75 Liter auf 100 km.

4. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = a_2x^2 - x + 2$
   Für welche Werte von a_2 hat f(x) eine doppelte Nullstelle?
   Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

   Ansatz:

   $a_2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a_2}x + \frac{2}{a_2} = 0$ ist die Normalform der quadratischen Gleichung.

   Berechnen Sie die Diskriminante und bestimmen Sie a_2 so, dass $D = 0$ ist.

E4:

$$f(x) = a_2x^2 - x + 2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a_2x^2 - x + 2 = 0 \,|:a_2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a_2}x + \frac{2}{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{a_2} \quad q = \frac{2}{a_2} \text{ und } \frac{p}{2} = -\frac{1}{2a_2}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{2a_2}\right)^2 - \frac{2}{a_2} = \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2}$$

Doppelte Nullstelle bedeutet $D = 0$

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2} = 0 \,|\cdot 4a_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{4a_2^2} - 2 = 0 \,|\cdot 4a_2^2 \Leftrightarrow a_2 - 8a_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2(1 - 8a_2) = 0 \Rightarrow a_{2/1} = 0$$

Lösung scheidet aus, da mit $a_2 = 0$ $f(x)$ keine quadratische Gleichung mehr ist.

$$1 - 8a_2 = 0 \,|+8a_2 \Leftrightarrow 1 = 8a_2 \,|:8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = a_2 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = \frac{1}{8}}}$$

Für $a_2 = \frac{1}{8}$ hat $f(x)$ eine doppelte Nullstelle.

Viel Erfolg!

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 6.12.06**
SG26 D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner.
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

a) $\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$ b) $\left(\frac{3}{4}x+1\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{2}\right)=0$

c) Überprüfen Sie das Ergebnis von a) mit dem Wurzelsatz von Vieta.

E1:

a) $\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0\,|:\frac{2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow p=1 \quad q=-2$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}} \\ x_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2}}\end{array}\right.$$

b) $\left(\frac{3}{4}x+1\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{2}\right)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$$\frac{3}{4}x+1=0\,|-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{4}x=-1:\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{1}:\frac{3}{4}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \underline{\underline{x_1=-\frac{4}{3}}}$$

$$2x-\frac{1}{2}=0\,|+\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x=\frac{1}{2}\,|:2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}:\frac{2}{1}=\frac{1}{4}\Rightarrow \underline{\underline{x_2=\frac{1}{4}}}$$

c) $x_1=1$ und $x_2=-2 \quad p=1$ und $q=-2$

$$x_1+x_2=1+(-2)=1-2=-1=-p\Rightarrow \underline{\underline{p=1}}$$

$$x_1\cdot x_2=1\cdot(-2)=-2=q\Rightarrow \underline{\underline{q=-2}}$$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$

a) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt und stellen Sie die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform dar.
c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
d) Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht.
e) Schreiben Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren.

E2:

a)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,-\frac{5}{2}\right)}}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=0\,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x-5=0 \quad \Rightarrow p=-4 \quad q=-5$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+5=9=\frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=2+3=\underline{\underline{5}} \\ x_2=2-3=\underline{\underline{-1}} \end{array} \right. \qquad \underline{\underline{P_{x1}(5\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(-1\,|\,0)}}$$

b)

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5+(-1)}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2}}$$

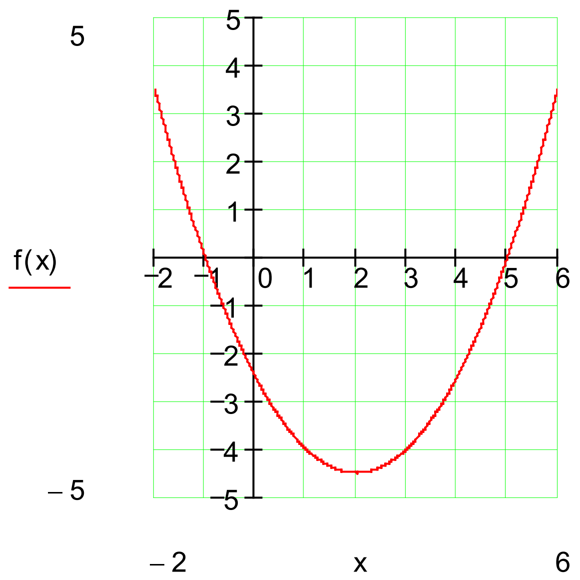
$$y_s=f(x_s)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2-\frac{5}{2}=2-4-\frac{5}{2}=-2-\frac{5}{2}=-\frac{4}{2}-\frac{5}{2}=\underline{\underline{-\frac{9}{2}}}$$

Scheitelpunktkoordinaten: $\underline{\underline{S\left(2\,|\,-\frac{9}{2}\right)}}$

Scheitelpunktform: $\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{9}{2}}}$

c)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$$



d) Normalparabel gestaucht mit dem Formfaktor $a_2 = \frac{1}{2}$, nach oben geöffnet.
Verschiebung in x- Richtung nach rechts um 2 Einheiten.
Verschiebung in y- Richtung um $\frac{9}{2}$ Einheiten nach unten.

e) Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren.
Mit $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$ und $a_2 = \frac{1}{2}$ wird $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}(x-5)(x+1)}}$

3. Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:
   $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6$ für $v > 40$
   a) Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h.
   b) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 6 Liter auf 100 km?
   c) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau?
   (Hinweis: Die Funktionsgleichung b(v) ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 4,75). Nutzen Sie diesen Hinweis.)
   Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz..

E3:

a) $b(v) = 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6$ für $v > 40$

$b(120) = 0{,}0005 \cdot 120^2 - 0{,}05 \cdot 120 + 6 = \underline{\underline{7{,}2}}$

Bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h beträgt der Benzinverbrauch 7,2 Liter auf 100 km.

b) $b(v) = 6 \Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v + 6 = 6 | -6$

$\Leftrightarrow 0{,}0005v^2 - 0{,}05v = 0 \Leftrightarrow v(0{,}0005v - 0{,}05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40$ scheidet aus

$0{,}0005v - 0{,}05 = 0 | +0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}0005v = 0{,}05 | : 0{,}0005 \Leftrightarrow \underline{\underline{v_2 = \frac{0{,}05}{0{,}0005} = 100}}$

Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 Liter auf 100 km.

c) Beim Graphen von b(v) handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt S(50 | 4,75). Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch.
Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 4,75 Liter auf 100 km.

4. Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = a_2x^2 - x + 2$
   Für welche Werte von a_2 hat f(x) eine doppelte Nullstelle?
   f(x) eine (doppelte) Nullstelle?
   Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

   Ansatz:

   $a_2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a_2}x + \frac{2}{a_2} = 0$ ist die Normalform der quadratischen Gleichung.
   Berechnen Sie die Diskriminante und bestimmen Sie a_2 so, dass $D = 0$ ist.

E4:

$f(x) = a_2x^2 - x + 2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow a_2x^2 - x + 2 = 0 \,|\, : a_2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a_2}x + \frac{2}{a_2} = 0$

$\Rightarrow p = -\frac{1}{a_2} \quad q = \frac{2}{a_2}$ und $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2a_2}$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{2a_2}\right)^2 - \frac{2}{a_2} = \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2}$

Doppelte Nullstelle bedeutet $D = 0$

$D = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4a_2^2} - \frac{2}{a_2} = 0 \,|\, \cdot 4a_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{4a_2^2} - 2 = 0 \,|\, \cdot 4a_2^2 \Leftrightarrow a_2 - 8a_2^2 = 0$

$\Leftrightarrow a_2(1 - 8a_2) = 0 \Rightarrow a_{2/1} = 0$

Lösung scheidet aus, da mit $a_2 = 0$ $f(x)$ keine quadratische Gleichung mehr ist.

$1 - 8a_2 = 0 \,|\, + 8a_2 \Leftrightarrow 1 = 8a_2 \,|\, : 8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = a_2 \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = \frac{1}{8}}}$

Für $a_2 = \frac{1}{8}$ hat $f(x)$ eine doppelte Nullstelle.

Viel Erfolg!