

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 29.05.13
SG22D Gruppe A	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2}$
a)	Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
b)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von $f(x)$.

A1	Ausführliche Lösung
a)	<p>Scheitelpunktkoordinaten:</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2} \Rightarrow f'(x) = x - 1$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow x_s = 1$ $y_s = f(x_s) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{15}{2} = \frac{16}{2} = -8 \Rightarrow \underline{\underline{S(1 -8)}}$
b)	<p>Achsenschnittpunkte:</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2}$ $P_y : f(0) = -\frac{15}{2} \Rightarrow P_y \left(0 \mid -\frac{15}{2} = -7,5 \right)$ $P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{15}{2} = 0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow p = -2, q = -15$ $D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = 1 + 15 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = 1 + 4 = 5 \\ x_2 = 1 - 4 = -3 \end{array} \right.$ $\underline{\underline{P_{x1}(5 0); P_{x2}(-3 0)}}$

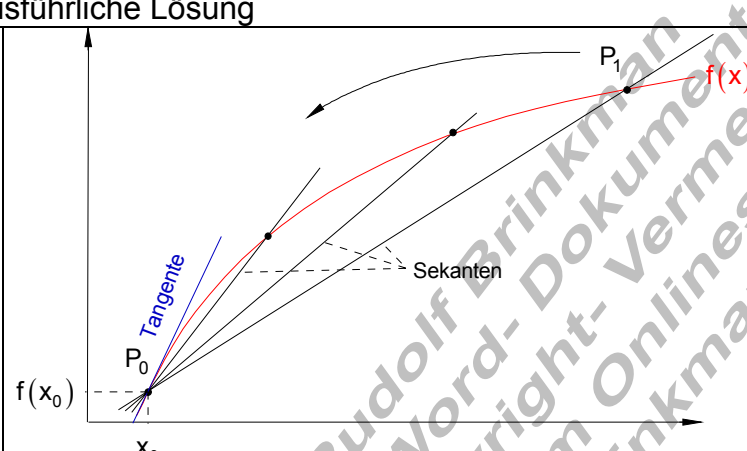
2.	Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.		
a)	$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$	b)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x^2 + 8x = 0$ den Faktor x ausklammern $\Leftrightarrow x(-4x^2 + 4x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $-4x^2 + 4x + 8 = 0 \mid :(-4)$ quadratische Gleichung $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{array} \right.$ Der Graph hat drei einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ und bei $x_3 = -1$

A2	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ 1. Nullstelle über probieren: $\begin{array}{r} 1 \quad -6 \quad 9 \quad -2 \\ x=1 \quad \downarrow \quad \underline{1} \quad \underline{-5} \quad \underline{4} \\ \hline 1 \quad -5 \quad 4 \quad 2 \quad \text{keine NS für } x=1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \quad -6 \quad 9 \quad -2 \\ x=2 \quad \downarrow \quad \underline{2} \quad \underline{-8} \quad \underline{2} \\ \hline 1 \quad -4 \quad 1 \quad 0 \quad \text{NS für } x_1 = 2 \end{array}$ Reduzierung des Grades über Polynomdivision $(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1$ $\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -4x^2 + 9x \\ -(-4x^2 + 8x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$ $x^2 - 4x + 1 = 0 \quad p = -4; q = 1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$ $x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_2 = 2 + \sqrt{3} \\ x_3 = 2 - \sqrt{3} \end{array} \right.$ Die Nullstellen: $x_1 = 2; x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,732; x_3 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$

3. Wissensfragen	
a)	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?
b)	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.
c)	Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion?
d)	Wie findet man bei einem Funktionsgraphen die Stellen mit waagerechter Tangente?

A3 Ausführliche Lösung	
a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

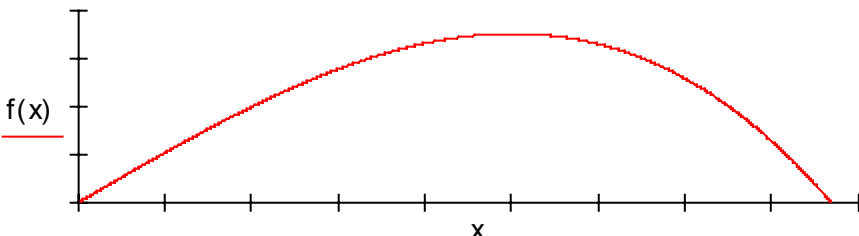
A3 Ausführliche Lösung	
b)	 <p>Das Diagramm zeigt einen Funktionsgraphen $f(x)$ in einem Koordinatensystem. Ein Punkt P_0 ist auf der x-Achse bei x_0 markiert, und sein Funktionswert $f(x_0)$ ist auf der y-Achse eingezeichnet. Eine Tangente (blau) verläuft durch P_0 und ist als 'Tangente' beschriftet. Mehrere Sekanten (schwarz) verlaufen durch P_0 und andere Punkte auf dem Graphen. Eine Sekante verläuft durch P_0 und P_1. Ein Pfeil zeigt an, dass P_1 sich dem Graphen nähert. Die Beschriftungen 'Tangente' und 'Sekanten' sind ebenfalls vorhanden.</p>
	<p>Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung.</p> <p>Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.</p>

A3 Ausführliche Lösung	
c)	Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von $f(x)$ repräsentiert.

A3 Ausführliche Lösung	
d)	Die Stellen mit waagerechter Tangente sind dort zu finden, wo die erste Ableitung den Wert Null hat.

4.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$
	Leiten Sie die Funktion ab und berechnen Sie die Punkte mit waagerechter Tangente.

A4	<p>Ausführliche Lösung</p> $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0 \mid : 3$ $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow p = 1; q = -2$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{array} \right.$ <p>waagerechte Tangenten an den Stellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$</p> $f(x_1) = f(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 - 2 = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} - \frac{16}{2} = -\frac{11}{2}$ $f(x_2) = f(-2) = -8 + 6 + 12 - 2 = 8$ <p>Punkte mit waagerechter Tangente:</p> $P_1\left(1 \mid -\frac{11}{2} = -5,5\right); P_2(-2 \mid 8)$
----	--

5.	<p>Der Graph der Funktion $f(x)$ ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf.</p> $f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \quad \text{für } x > 0$ <p>Maßstab: Eine Einheit in x – Richtung bedeutet 10m, eine Einheit in y – Richtung bedeutet 1m</p> 
a)	Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b)	Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c)	Welche Höhe hat der Speer in 70 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

A5	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{21}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 5$ <p>nur $x = 5$ zählt, da $x > 0$ sein soll</p> $f(5) = 7 \Rightarrow P_{\max}(5 7)$ <p>$x = 5$ bedeutet 50 m Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 7 m. Er ist dann 50 m vom Abwurfpunkt entfernt.</p>

A5	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ <p>$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle</p> $-\frac{7}{250}x^2 + \frac{21}{10} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm \sqrt{75} \approx \pm 8,66$ <p>nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt $x = 8,66$ bedeutet 86,6 m Der Speer kommt 86,6 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.</p>

A5	Ausführliche Lösung
c)	$f(x) = -\frac{7}{250}x^3 + \frac{21}{10}x$ <p>70m bedeutet $x = 7$</p> $f(7) = 5,096$ <p>Der Speer hat in 70 m Entfernung vom Abwurfpunkt eine Höhe von 5,096 m.</p>

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Mi 29.05.13
SG22D	Gruppe B	NAME:	

Hilfsmittel: Taschenrechner.

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$
a)	Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
b)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von $f(x)$.

A1	Ausführliche Lösung
a)	<p>Scheitelpunktkoordinaten:</p> $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \Rightarrow f'(x) = -x - 2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow x_s = -2$ $y_s = f(x_s) = f(-2) = -2 + 4 + 6 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{S(-2 8)}}$
b)	<p>Achsenschnittpunkte:</p> $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ $P_y : f(0) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 6)}}$ $P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \mid \cdot (-2)$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow p = 4, q = -12$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = -2 + 4 = 2 \\ x_2 = -2 - 4 = -6 \end{array} \right.$ $\underline{\underline{P_{x1}(2 0); P_{x2}(-6 0)}}$

2.	Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.		
a)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	b)	$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ den Faktor x ausklammern $\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^2 - 6x + 9 = 0$ quadratische Gleichung $p = -6; q = 9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$ $x_{2/3} = -\frac{p}{2} = 3$ doppelte Nullstelle Der Graph hat eine einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_{2/3} = 3$ (Berührungspunkt)

A2	Ausführliche Lösung
b)	$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow -z^2 + \frac{9}{2}z - \frac{81}{16} = 0 \mid \cdot (-1)$ $\Leftrightarrow z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{81}{16} = 0 \Rightarrow p = -\frac{9}{2} \quad q = \frac{81}{16}$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} = \frac{81}{16} - \frac{81}{16} = 0$ nur eine Lösung in z $z_1 = -\frac{p}{2} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \mid \sqrt{\quad} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ Nullstellen $x_{1/2} = \pm \frac{3}{2}$

3.	Wissensfragen
a)	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?
b)	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.
c)	Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ?
d)	Wie findet man bei einem Funktionsgraphen die Stellen mit waagerechter Tangente?

A3	Ausführliche Lösung
a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

A3	Ausführliche Lösung	
b)		<p>Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung.</p> <p>Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.</p>

A3	Ausführliche Lösung	
c)	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0 f(x_0))$ und somit auch die Steigung des Graphen von $f(x)$ in diesem Punkt.	

A3	Ausführliche Lösung	
d)	Die Stellen mit waagerechter Tangente sind dort zu finden, wo die erste Ableitung den Wert Null hat.	

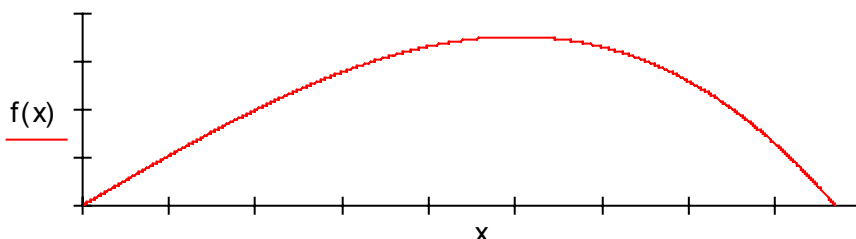
4.	Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$	
	Leiten Sie die Funktion ab und berechnen Sie die Punkte mit waagerechter Tangente.	

A4	Ausführliche Lösung	
$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \quad :3$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow p = +1; q = -2$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$ <p>waagerechte Tangenten an den Stellen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$</p> $f(x_1) = f(2) = 8 - 6 - 12 + 2 = -8$ $f(x_2) = f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 2 = -\frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{16}{2} = \frac{11}{2}$ <p>Punkte mit waagerechter Tangente:</p> $P_1(2 -8); P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2} = 5,5\right)$		

5. Der Graph der Funktion $f(x)$ ist näherungsweise die Flugkurve beim Speerwurf.

$$f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \quad \text{für } x > 0$$

Maßstab: Eine Einheit in x -Richtung bedeutet 10m,
eine Einheit in y -Richtung bedeutet 1m



- a) Welche maximale Höhe erreicht der Speer und wie weit ist er dann vom Abwurfpunkt entfernt?
b) Wie weit vom Abwurfpunkt kommt der Speer wieder auf den Boden?
c) Welche Höhe hat der Speer in 60 m Entfernung vom Abwurfpunkt?

A5 Ausführliche Lösung

$$a) \quad f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$$

nur $x = 4$ zählt, da $x > 0$ sein soll

$$f(4) = 6 \Rightarrow \underline{P_{\max}(4 | 6)}$$

$x = 4$ bedeutet 40 m

Der Speer erreicht eine maximale Höhe von 6 m.

Er ist dann 40 m vom Abwurfpunkt entfernt.

A5 Ausführliche Lösung

$$b) \quad f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$ ist die Abwurfstelle

$$-\frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm \sqrt{48} \approx \pm 6,93$$

nur die positive Lösung ist zu verwenden, da $x > 0$ gilt

$x = 6,93$ bedeutet 69,3 m

Der Speer kommt 69,3 m von der Abwurfstelle wieder auf den Boden.

A5 Ausführliche Lösung

$$c) \quad f(x) = -\frac{3}{64}x^3 + \frac{9}{4}x$$

60m bedeutet $x = 6$

$$f(6) = 3,275$$

Der Speer hat in 70 m Entfernung vom Abwurfpunkt eine Höhe von 3,275 m.

Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 - 100	1a	5	10
1-	89 - 92	1b	5	10
2+	85 - 88			
2	80 - 84	2a	5	10
2-	75 - 79	2b	5	10
3+	70 - 74			
3	65 - 69	3a	2	4
3-	60 - 64	3b	6	12
4+	55 - 59	3c	2	4
4	50 - 54	3d	2	4
4-	45 - 49			
5+	39 - 44	4	8	16
5	30 - 38			
5-	20 - 29	5a	3	6
6	0 - 19	5b	3	6
		5c	4	8
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 - 100	1a	5	10
1-	89 - 92	1b	5	10
2+	85 - 88			
2	80 - 84	2a	5	10
2-	75 - 79	2b	5	10
3+	70 - 74			
3	65 - 69	3a	2	4
3-	60 - 64	3b	6	12
4+	55 - 59	3c	2	4
4	50 - 54	3d	2	4
4-	45 - 49			
5+	39 - 44	4	8	16
5	30 - 38			
5-	20 - 29	5a	3	6
6	0 - 19	5b	3	6
		5c	4	8
		Summe	50	100