Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 19.03.13**
SG22 D Gruppe A	**NAME: Lösungen**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln.
$f(x) = 2x^2 - 4x + 8;\quad g(x) = x^2 + 2x - 1$

A1 Ausführliche Lösung

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 8 = x^2 + 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$\Rightarrow p = -6\,;\, q = 9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = 3$$
$$\Rightarrow g(3) = 3^2 + 2\cdot 3 - 1 = 14 \Rightarrow \underline{\underline{S_{1/2}(3\,|\,14)}} \text{ Berührungspunkt}$$

2. Eine Parabel geht durch die drei Punkte $P_1(-2\,|\,4); P_2(1\,|\,4); P_3(3\,|\,-6)$
Berechnen Sie die Funktionsgleichung.

A2 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$P_1(-2\,|\,4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(1\,|\,4): f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(3\,|\,-6): f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -6$

a_0	a_1	a_2		
1	−2	4	4	
1	1	1	4	II − I
1	3	9	−6	III − I
1	−2	4	4	
0	3	−3	0	|:3
0	5	5	−10	|:(−5)
1	−2	4	4	
0	1	−1	0	
0	−1	−1	2	III + II
1	−2	4	4	
0	1	−1	0	
0	0	−2	2	

$$-2a_2 = 2 \,|:(-2)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$
$$a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 - 1\cdot(-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -1}$$
$$a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 \Leftrightarrow a_0 - 2\cdot(-1) + 4\cdot(-1) = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 4 = 4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$
$$\underline{\underline{f(x) = -x^2 - x + 6}}$$
$$P_1(-2\,|\,4): f(-2) = -(-2)^2 - 1\cdot(-2) + 6 = 4$$
$$P_2(1\,|\,4): f(1) = -1^2 - 1\cdot 1 + 6 = -1 - 1 + 6 = 4$$
$$P_3(3\,|\,-6): f(3) = -3^2 - 1\cdot 3 + 6 = -6$$

3.	Wissensfragen	
	a)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=4x^5-2x^3+x$
	b)	Wodurch wird im Allgemeinen der Verlauf einer ganzrationalen Funktion bestimmt? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=2x^4+3x^2-2x+1$
	c)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung gerade sind. Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung ungerade sind. $f(x)=4x^5-2x^3+x \quad \Rightarrow$ Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind
	b)	Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$. $f(x)=2x^4+3x^2-2x+1 \quad n=4\ (\text{gerade}) \wedge a_n=2>0 \Rightarrow \underline{\underline{II-I}}$
	c)	Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle. $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$ hat mindestens eine und höchstens 3 Nullstellen.

4.	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen.			
	a)	$f(x)=x^3-6x^2+9x$	b)	$f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=x^3-6x^2+9x$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0$ den Faktor x ausklammern $\Leftrightarrow x\left(x^2-6x+9\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $x^2-6x+9=0$ quadratische Gleichung $p=-6\,;q=9 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$ $x_{2/3}=-\frac{p}{2}=3$

A4	Ausführliche Lösung
	b) $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216=0$ Substitution: $x^2=z \Rightarrow -\frac{3}{2}z^2+\frac{75}{2}z-216=0 \mid \cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$ $\Leftrightarrow z^2-25z+144=0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p=-25\,;\,q=144 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{625}{4}-\frac{576}{4}=\frac{49}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$ $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad\Bigg\vert\quad z_1=\frac{25}{2}+\frac{7}{2}=\frac{32}{2}=16$ $\quad z_2=\frac{25}{2}-\frac{7}{2}=\frac{18}{2}=9$ $z_1=16\,;\,z_2=9 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 4\,;\,x_{3/4}=\pm 3$

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 19.03.13**
SG22 D Gruppe B	**NAME: Lösungen**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln.
$f(x) = -x^2 + 3x - 1{,}5;\quad g(x) = -x^2 - x + 2{,}5$

A1 Ausführliche Lösung

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 1{,}5 = -x^2 - x + 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$\Rightarrow f(1) = -1^2 + 3\cdot 1 - 1{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{S(1\,|\,0{,}5)}}$$

Die Parabeln schneiden sich in einem Punkt.

2. Eine Parabel geht durch die drei Punkte $P_1(-3\,|\,10)$; $P_2(1\,|\,-2)$; $P_3(3\,|\,4)$
Berechnen Sie die Funktionsgleichung.

A2 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$$P_1(-3\,|\,10): f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 10$$
$$P_2(1\,|\,-2): f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -2$$
$$P_2(3\,|\,4): f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 4$$

a_0	a_1	a_2	
1	−3	9	10
1	1	1	−2 II − I
1	3	9	4 III − I
1	−3	9	10
0	4	−8	−12
0	6	0	−6

$$6a_1 = -6 \,|\, :6$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -1}$$
$$4a_1 - 8a_2 = -12 \Leftrightarrow 4\cdot(-1) - 8a_2 = -12$$
$$\Leftrightarrow -8a_2 - 4 = -12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 1}$$
$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 10 \Leftrightarrow a_0 - 3\cdot(-1) + 9\cdot 1 = 10$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 9 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$
$$\underline{\underline{f(x) = x^2 - x - 2}}$$

$$P_1(-3\,|\,10): f(-3) = (-3)^2 - 1\cdot(-3) - 2 = 9 + 3 - 2 = 10$$
$$P_2(1\,|\,-2): f(1) = 1^2 - 1\cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$P_3(3\,|\,4): f(2) = 3^2 - 1\cdot 3 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

3.	Wissensfragen
a)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$
b)	Wodurch wird im Allgemeinen der Verlauf einer ganzrationalen Funktion bestimmt? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4$
c)	Was wissen Sie im Allgemeinen über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen? Was bedeutet das speziell für die nachfolgende Funktion? $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$

A3	Ausführliche Lösungen
a)	Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>achsensymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>gerade</u> sind. Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann <u>punktsymmetrisch</u>, wenn alle Exponenten in der Funktionsgleichung <u>ungerade</u> sind. $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2 \quad \Rightarrow$ Achsensymmetrie, da alle Exponenten gerade sind
b)	Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4 \quad n = 3 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$
c)	Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle. $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$ hat höchstens 4 Nullstellen.

4.	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen.		
a)	$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x^2 + 8x = 0$ den Faktor x ausklammern

$$\Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 4x + 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$-4x^2 + 4x + 8 = 0 \,|:(-4)$ quadratische Gleichung

Normalform der quadratischen Gleichung

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1; q = -2 \Rightarrow D == \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{array} \right.$$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18=0$ Substitution: $x^2=z \Rightarrow \frac{1}{2}z^2-\frac{13}{2}x+18=0 \mid \cdot(2)$ $\Leftrightarrow z^2-13z+36=0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p=-13\,;q=36 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} z_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=\frac{18}{2}=9 \\ z_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4 \end{array} \right.$ $z_1=9\,;z_2=4 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 3\,;x_{3/4}=\pm 2$

Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 - 100	1	8	16
1-	89 - 92			
2+	85 - 88	2	12	24
2	80 - 84			
2-	75 - 79	3a	4	8
3+	70 - 74	3b	4	8
3	65 - 69	3c	4	8
3-	60 - 64			
4+	55 - 59	4a	9	18
4	50 - 54	4b	9	18
4-	45 - 49			
5+	39 - 44			
5	30 - 38			
5-	20 - 29			
6	0 - 19			
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 – 100	1	8	16
1^-	89 – 92			
2^+	85 – 88	2	12	24
2	80 – 84			
2^-	75 – 79	3a	4	8
3^+	70 – 74	3b	4	8
3	65 – 69	3c	4	8
3^-	60 – 64			
4^+	55 – 59	4a	9	18
4	50 – 54	4b	9	18
4^-	45 – 49			
5^+	39 – 44			
5	30 – 38			
5^-	20 – 29			
6	0 – 19			
		Summe	50	100