

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Di 18.12.12
SG22 D Gruppe A	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner

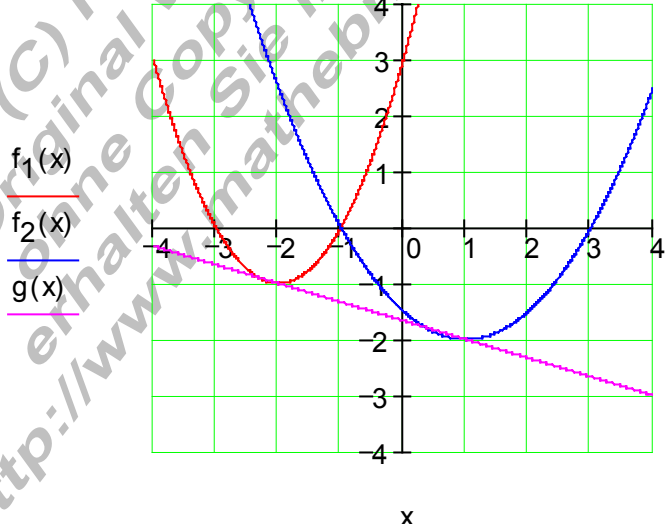
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

Ausführliche Lösungen:

1.	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:	
a)	$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0$	b) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0$

A1	Ausführliche Lösungen	
a)	$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \mid : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow p = -1 \quad q = -2$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}} \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = \underline{\underline{-1}} \end{array} \right.$	
b)	$\left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt. $\frac{1}{2}x - 2 = 0 \mid +2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$ $\frac{3}{4}x + 2 = 0 \mid -2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -2 \mid : \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{1} : \frac{3}{4} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\frac{8}{3}}}$	

2.	Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Nullstellen. $f_1(x) = x^2 + 4x + 3$ Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = -1$ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$	
a)	Berechnen Sie die Scheitelpunkte S_1 und S_2 beider Parabeln.	
b)	Berechnen Sie die Scheitelpunktform der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.	
c)	Bestimmen Sie durch Rechnung die Funktionsgleichung $g(x)$ der Geraden, die durch beide Scheitelpunkte verläuft.	
d)	Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem.	

A2	Ausführliche Lösungen
	<p>a) $f_1(x) = x^2 + 4x + 3$ Nullstellen: $x_1 = -3; x_2 = -1$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$ $y_s = f_1(x_s) = f_1(-2) = 4 - 8 + 3 = -1$ $\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-2 -1)}}$</p> <p>$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1 = -1; x_2 = 3$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$ $y_s = f_2(x_s) = f_2(1) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2$ $\Rightarrow \underline{\underline{S_2(1 -2)}}$</p>
	<p>b) $f_1(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{(x + 2)^2 - 1}}$ $f_2(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2}}$</p>
	<p>c) $g(x) = a_1x + a_0$ mit $S_1(-2 -1)$ und $S_2(1 -2)$ als P_1 und P_2 $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - (-1)}{1 - (-2)} = \frac{-2 + 1}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + a_0$ $S_2(1 -2) \Rightarrow g(1) = -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \cdot 1 + a_0 = -2 \mid + \frac{1}{3} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{5}{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}}}$</p>
	<p>d)</p>  <p>$f_1(x)$ $f_2(x)$ $g(x)$</p>

3.	Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben: $b(v) = 0,0005v^2 - 0,05v + 8$ für $v > 40$
a)	Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h.
b)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 8 Liter auf 100 km?
c)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau? Hinweis: Die Funktionsgleichung $b(v)$ ist die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel. Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$b(v) = 0,0005v^2 - 0,05v + 8$ für $v > 40$ $b(140) = 0,0005 \cdot 140^2 - 0,05 \cdot 140 + 8 = \underline{\underline{10,8}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 140 km/h beträgt der Benzinverbrauch 10,8 Liter auf 100 km.
b)	$b(v) = 8 \Leftrightarrow 0,0005v^2 - 0,05v + 8 = 8 \quad - 8$ $\Leftrightarrow 0,0005v^2 - 0,05v = 0 \Leftrightarrow v(0,0005v - 0,05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40$ scheidet aus $0,0005v - 0,05 = 0 \quad + 0,05 \Leftrightarrow 0,0005v = 0,05 \quad : 0,0005 \Leftrightarrow v_2 = \frac{0,05}{0,0005} = \underline{\underline{100}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 8 Liter auf 100 km.
c)	Beim Graphen von $b(v)$ handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(50 \mid 6,75)$. Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 6,75 Liter auf 100 km.

4.	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = x^2 + 3x + a_0$
a)	Berechnen Sie die Diskriminante D.
b)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ eine (doppelte) Nullstelle?
c)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ zwei Nullstellen?
d)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ keine Nullstelle?
	Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$f(x) = x^2 + 3x + a_0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + a_0 = 0 \Rightarrow p = 3; q = a_0$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - a_0 = \frac{9}{4} - a_0$
b)	Bedingung für eine Nullstelle: $D = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 = 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{9}{4}$ Für $a_0 = \frac{9}{4} = 2,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau eine Nullstelle.
c)	Bedingung für zwei Nullstellen: $D > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 > 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} > a_0 \Leftrightarrow a_0 < \frac{9}{4}$ Für $a_0 < \frac{9}{4} = 2,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau zwei Nullstellen.
d)	Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - a_0 < 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} < a_0 \Leftrightarrow a_0 > \frac{9}{4}$ Für $a_0 > \frac{9}{4} = 2,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ keine Nullstelle.

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Di 18.12.12
SG22 D Gruppe B	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner

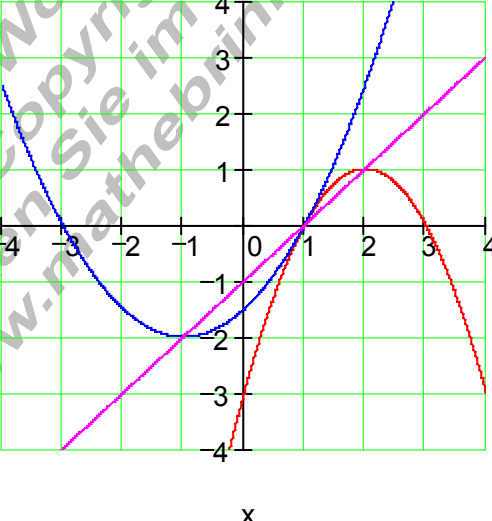
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

Ausführliche Lösungen:

1.	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:	
a)	$\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0$	b) $\left(\frac{3}{4}x + 1\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = 0$

A1	Ausführliche Lösungen	
a)	$\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \mid : \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow p = 1 \quad q = -2$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$	
b)	$\left(\frac{3}{4}x + 1\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt. $\frac{3}{4}x + 1 = 0 \mid -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = -1 \mid : \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1 : \frac{3}{4} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}$ $2x - \frac{1}{2} = 0 \mid + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \mid : 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}$	

2.	Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Nullstellen. $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$ Nullstellen: $x_1 = 1; x_2 = 3$ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1 = -3; x_2 = 1$	
a)	Berechnen Sie die Scheitelpunkte S_1 und S_2 beider Parabeln.	
b)	Berechnen Sie die Scheitelpunktform der Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.	
c)	Bestimmen Sie durch Rechnung die Funktionsgleichung $g(x)$ der Geraden, die durch beide Scheitelpunkte verläuft.	
d)	Zeichnen Sie beide Parabeln und die Gerade in ein Koordinatensystem.	

A2	Ausführliche Lösungen
	<p>a) $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$ Nullstellen: $x_1 = 1; x_2 = 3$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$ $y_s = f_1(x_s) = f_1(2) = -4 + 8 - 3 = 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{S_1(2 1)}}$</p> <p>$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ Nullstellen: $x_1 = -3; x_2 = 1$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$ $y_s = f_2(x_s) = f_2(-1) = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -2$ $\Rightarrow \underline{\underline{S_2(-1 -2)}}$</p>
	<p>b) $f_1(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{-(x-2)^2 + 1}}$ $f_2(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2}}$</p>
	<p>c) $g(x) = a_1x + a_0$ mit $S_1(2 1)$ und $S_2(-1 -2)$ als P_1 und P_2 $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{-1 - 2} = \frac{-3}{-3} = 1$ $\Rightarrow g(x) = x + a_0$ $S_1(2 1) \Rightarrow g(2) = 1 \Leftrightarrow 2 + a_0 = 1 \mid -2 \Leftrightarrow a_0 = -1$ $\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = x - 1}}$</p>
	<p>d)</p>  <p>$f_1(x)$ $f_2(x)$ $g(x)$</p> <p style="text-align: center;">x</p>

3.	Der Benzinverbrauch eines PKW in Liter/100 km in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v in km/h lässt sich durch folgende Funktionsgleichung beschreiben: $b(v) = 0,0005v^2 - 0,05v + 6$ für $v > 40$
a)	Berechnen Sie den Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h.
b)	Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 6 Liter auf 100 km?
c)	Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten? Wie hoch ist er genau? Hinweis: Die Funktionsgleichung $b(v)$ ist die Gleichung einer nach oben geöffneten Parabel. Schreiben Sie zu jedem Ergebnis einen Antwortsatz

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$b(v) = 0,0005v^2 - 0,05v + 6$ für $v > 40$ $b(120) = 0,0005 \cdot 120^2 - 0,05 \cdot 120 + 6 = \underline{\underline{7,2}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h beträgt der Benzinverbrauch 7,2 Liter auf 100 km.
b)	$b(v) = 6 \Leftrightarrow 0,0005v^2 - 0,05v + 6 = 6 \quad -6$ $\Leftrightarrow 0,0005v^2 - 0,05v = 0 \Leftrightarrow v(0,0005v - 0,05) = 0 \Rightarrow v_1 = 0 < 40$ scheidet aus $0,0005v - 0,05 = 0 \quad +0,05 \Leftrightarrow 0,0005v = 0,05 \quad : 0,0005 \Leftrightarrow v_2 = \frac{0,05}{0,0005} = \underline{\underline{100}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 Liter auf 100 km.
c)	Beim Graphen von $b(v)$ handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(50 \mid 4,75)$. Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt der Parabel. Das entspricht dem niedrigsten Kraftstoffverbrauch. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten. Er beträgt 4,75 Liter auf 100 km.

4.	Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Parabel: $f(x) = x^2 + 5x + a_0$
a)	Berechnen Sie die Diskriminante D.
b)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ eine (doppelte) Nullstelle?
c)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ zwei Nullstellen?
d)	Für welche Werte von a_0 hat $f(x)$ keine Nullstelle?
	Begründen Sie jedes Ergebnis durch eine entsprechende Rechnung.

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$f(x) = x^2 + 5x + a_0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + a_0 = 0 \Rightarrow p = 5; q = a_0$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - a_0 = \frac{25}{4} - a_0$
b)	Bedingung für eine Nullstelle: $D = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 = 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} = a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{25}{4}$ Für $a_0 = \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau eine Nullstelle.
c)	Bedingung für zwei Nullstellen: $D > 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 > 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} > a_0 \Leftrightarrow a_0 < \frac{25}{4}$ Für $a_0 < \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ genau zwei Nullstellen.
d)	Bedingung für keine Nullstelle: $D < 0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} - a_0 < 0 \mid +a_0 \Leftrightarrow \frac{25}{4} < a_0 \Leftrightarrow a_0 > \frac{25}{4}$ Für $a_0 > \frac{25}{4} = 6,25$ hat $f(x) = x^2 + 3x + a_0$ keine Nullstelle.

Leistungsbewertung				
Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 - 100	1a	5	10
1-	89 - 92	1b	5	10
2+	85 - 88			
2	80 - 84	2a	5	10
2-	75 - 79	2b	3	6
3+	70 - 74	2c	6	12
3	65 - 69	2d	6	12
3-	60 - 64			
4+	55 - 59	3a	4	8
4	50 - 54	3b	4	8
4-	45 - 49	3c	4	8
5+	39 - 44			
5	30 - 38	4a	2	4
5-	20 - 29	4b	2	4
6	0 - 19	4c	2	4
		4d	2	4
		Summe	50	100

Note	% der Gesamtpunktzahl	Aufgabe	Punkte	%
1	93 - 100	1a	5	10
1-	89 - 92	1b	5	10
2+	85 - 88			
2	80 - 84	2a	5	10
2-	75 - 79	2b	3	6
3+	70 - 74	2c	6	12
3	65 - 69	2d	6	12
3-	60 - 64			
4+	55 - 59	3a	4	8
4	50 - 54	3b	4	8
4-	45 - 49	3c	4	8
5+	39 - 44			
5	30 - 38	4a	2	4
5-	20 - 29	4b	2	4
6	0 - 19	4c	2	4
		4d	2	4
		Summe	50	100