

Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 16.03.06
SG15D Gruppe A	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$

- Berechnen Sie die Nullstellen.
- Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
- Wie ist der Verlauf des Graphen?
- Machen Sie eine Aussage über die Funktionswerte für große und für kleine x -Werte. (d.h. für $x \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow -\infty$)

Lösung:

6 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = -\frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -\frac{3}{2}$

2 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

2 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III \rightarrow I

2 Punkte

d) für $x \rightarrow \infty$ wird $f(x) \rightarrow \infty$
für $x \rightarrow -\infty$ wird $f(x) \rightarrow -\infty$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

- a) Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
- b) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
- c) Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	-7,38		3,88		4,13		-0,63		-4,38		-1,13	

- d) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Dabei sei $P_{\max}(-1 | 5)$ ein Hochpunkt und $P_{\min}(\frac{5}{3} | -\frac{121}{27})$ ein Tiefpunkt.

Lösung:

2 Punkte

a) Der Graph von $f(x)$ hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III \rightarrow I

8 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:
 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

$\begin{array}{r} x = 1 \\ \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \\ \downarrow \quad 1 \quad 0 \quad -5 \\ \hline 1 \quad 0 \quad -5 \quad -3 = f(1) \end{array} \end{array}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$
$\begin{array}{r} x = 2 \\ \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \\ \downarrow \quad 2 \quad 2 \quad -6 \\ \hline 1 \quad 1 \quad -3 \quad -4 = f(2) \end{array} \end{array}$	oder über Polynomdivision: $(x^3 - x^2 - 5x + 2) : (x + 2) = x^2 - 3x + 1$
$\begin{array}{r} x = -1 \\ \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \\ \downarrow \quad -1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 1 \quad -2 \quad -3 \quad 5 = f(-1) \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{r} -(x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 - 5x \end{array}$
$\begin{array}{r} x = -2 \\ \begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \\ \downarrow \quad -2 \quad 6 \quad -2 \\ \hline 1 \quad -3 \quad 1 \quad 0 = f(-2) \end{array} \end{array}$	$\begin{array}{r} -(-3x^2 - 6x) \\ \hline x + 2 \\ -(x + 2) \\ \hline \end{array}$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 - 3x + 1 = 0$ mit $p = -3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2,62 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0,38 \end{array} \right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$$P_y(0 | 2) \quad P_{x1}(-2 | 0)$$

$$P_{x2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \mid 0\right)$$

$$P_{x2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \mid 0\right)$$

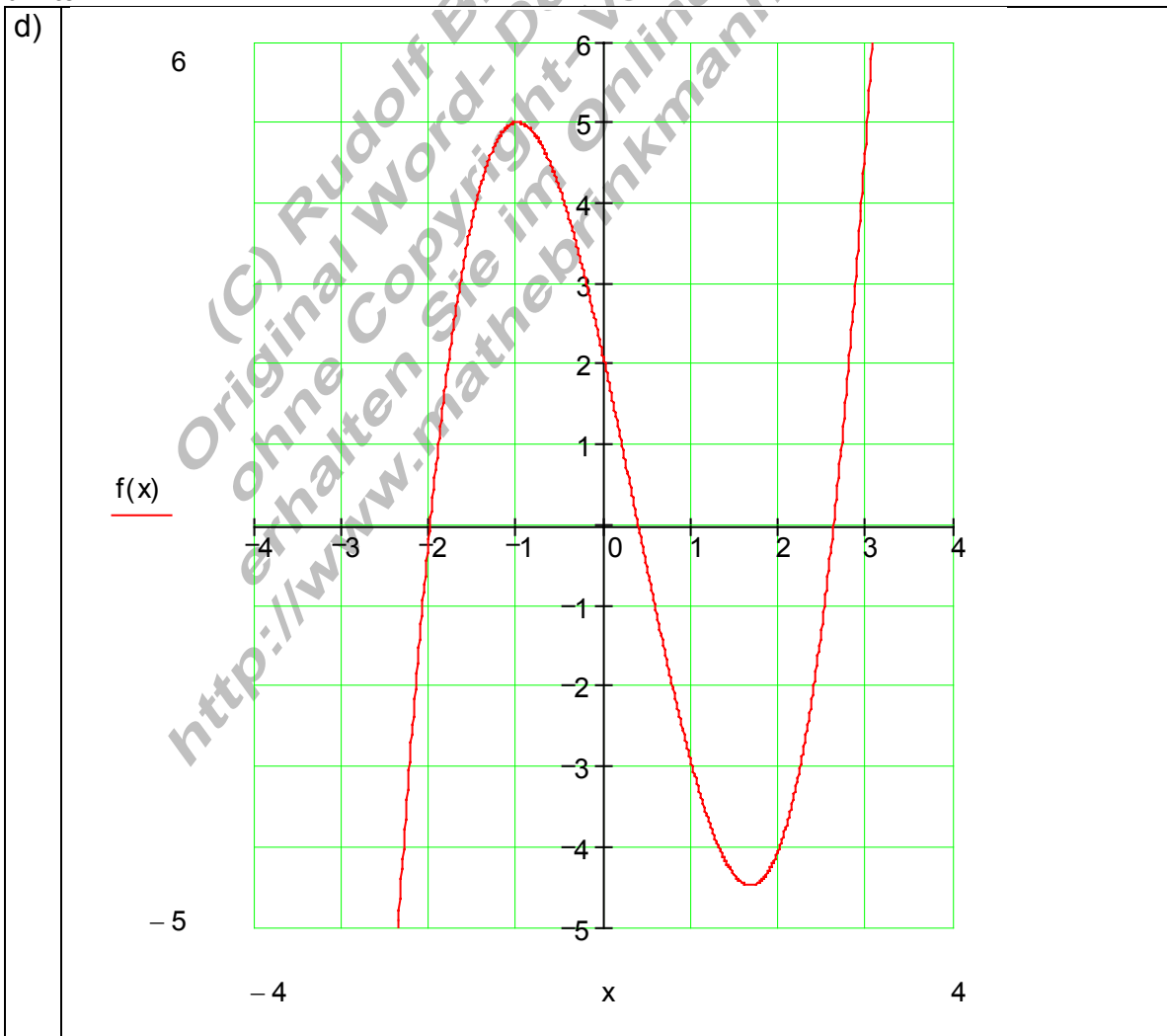
3 Punkte

c) Die Wertetabelle:

		P_{x1}		P_{max}		P_y		
x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
f(x)	-7,38	0	3,88	5	4,13	2	-0,63	-3
					P_{min}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1,5	2	2,5	3	1,6	2,62	0,38	
f(x)	-4,38	-4	-1,13	5	-4,48	0	0	

$1 \quad -1 \quad -5 \quad 2$
 $x = 3 \quad \downarrow \quad \underline{3} \quad \underline{6} \quad \underline{3}$
 $1 \quad 2 \quad 1 \quad 5 = f(3)$

5 Punkte



3. Gegeben sind die Punkte $P_1(2 | -4)$; $P_2(4 | 0)$; $P_3(6 | 4)$; $P_4(8 | -4)$
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
 - Tragen Sie die aus den gegebenen Punkten bekannten Werte in eine Wertetabelle und bestimmen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte:
 $x \in \{0; 1; 3; 5; 7\}$
 - Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Tiefpunkt: $P_1(2 | -4)$ Hochpunkt: $P_3(6 | 4)$

Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 4$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
<http://www.mathebrinkmann-shop.de>

12 Punkte

a) $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(2 | -4) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(4 | 0) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 0$

$P_3(6 | 4) \Rightarrow f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = 4$

$P_4(8 | -4) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = -4$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	-4	
1	4	16	64	0	II - I
1	6	36	216	4	III - I
1	8	64	512	-4	IV - I
1	2	4	8	-4	
0	2	12	56	4	: 2
0	4	32	208	8	: 4
0	6	60	504	0	: 6
1	2	4	8	-4	
0	1	6	28	2	
0	1	8	52	2	III - II
0	1	10	84	0	IV - II
1	2	4	8	-4	
0	1	6	28	2	
0	0	2	24	0	
0	0	4	56	-2	: 2
1	2	4	8	-4	
0	1	6	28	2	
0	0	2	24	0	
0	0	2	28	-1	IV - III
1	2	4	8	-4	
0	1	6	28	2	
0	0	1	12	0	
0	0	0	4	-1	

$4a_3 = -1 | : 4$
 $\Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{4}$

$a_2 + 12a_3 = 0$
 $\Leftrightarrow a_2 - 3 = 0 | + 3$
 $\Leftrightarrow a_2 = 3$

$a_1 + 6a_2 + 28a_3 = 2$
 $\Leftrightarrow a_1 + 18 - 7 = 2 | - 11$
 $\Leftrightarrow a_1 = -9$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -4$
 $\Leftrightarrow a_0 - 18 + 12 - 2 = -4 | + 8$
 $\Leftrightarrow a_0 = 4$

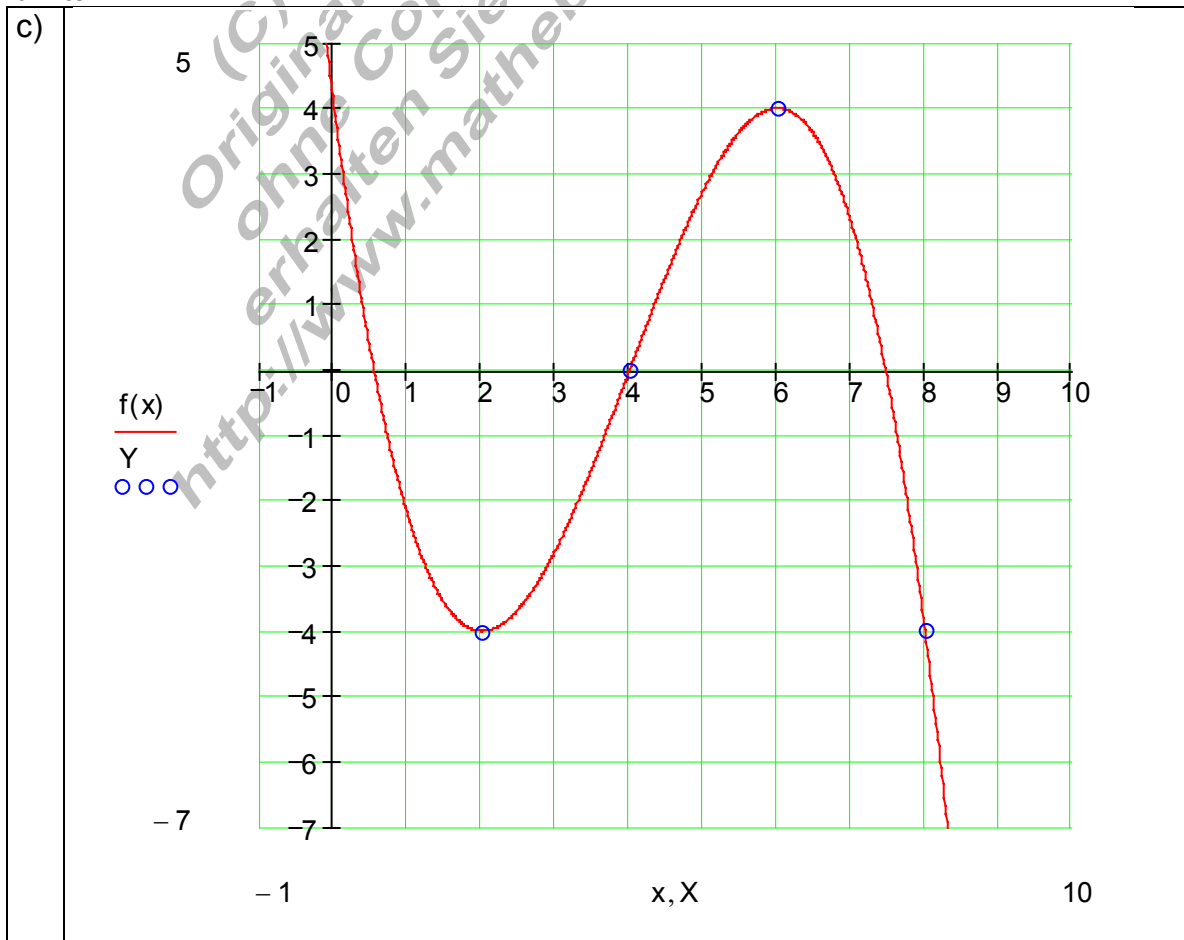
Die Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 4}}$$

4 Punkte

b)				P ₁ TP		P ₂		P ₃ HP		P ₄
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
f(x)	4	-2,25	-4	-2,75	0	2,75	4	2,25	-4	
		-1/4	3	-9	4					
x = 1	↓	<u>-1/4</u>	<u>11/4</u>	<u>-25/4</u>						
		-1/4	11/4	-25/4	-9/4	= f(1) = -2,25				
		-1/4	3	-9	4					
x = 3	↓	<u>-3/4</u>	<u>27/4</u>	<u>-27/4</u>						
		-1/4	9/4	-9/4	-11/4	= f(3) = -2,75				
		-1/4	3	-9	4					
x = 5	↓	<u>-5/4</u>	<u>35/4</u>	<u>-5/4</u>						
		-1/4	7/4	-1/4	11/4	= f(5) = 2,75				
		-1/4	3	-9	4					
x = 7	↓	<u>-7/4</u>	<u>35/4</u>	<u>-7/4</u>						
		-1/4	5/4	-1/4	9/4	= f(7) = 2,25				

4 Punkte



Klassenarbeit	Mathematik	Bearbeitungszeit 90 min.	Do 16.03.06
SG15D Gruppe B	NAME:		

Hilfsmittel: Taschenrechner.

Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

- Berechnen Sie die Nullstellen.
- Machen Sie eine Symmetriebetrachtung mit Begründung
- Wie ist der Verlauf des Graphen?
- Machen Sie eine Aussage über die Funktionswerte für große und für kleine x - Werte. (d.h. für $x \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow -\infty$)

6 Punkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \text{ mit } p = \frac{1}{2} \text{ und } q = -3$$

$$\text{wird } D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = \frac{1}{16} + \frac{48}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2 \end{array} \right.$$

Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = -2$

2 Punkte

b) Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade oder nur ungerade Exponenten gibt.

2 Punkte

c) Der Verlauf des Graphen ist von III \rightarrow I

2 Punkte

d) für $x \rightarrow \infty$ wird $f(x) \rightarrow \infty$
für $x \rightarrow -\infty$ wird $f(x) \rightarrow -\infty$

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$

- Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion und über den Verlauf des Graphen?
- Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte
- Übertragen Sie die Wertetabelle in ihr Heft und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)		1,13		4,38		0,63		-4,13		-3,88		7,38

- Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Dabei sei $P_{\min}(1 | -5)$ ein Tiefpunkt und $P_{\max}\left(-\frac{5}{3} | \frac{121}{27}\right)$ ein Hochpunkt.

2 Punkte

a) Der Graph von $f(x)$ hat mindestens eine Nullstelle, Verlauf von III \rightarrow I

8 Punkte

b) Achsenschnittpunkte:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

oder über Polynomdivision:

$x = 1$	↓	1	1	-5	-2	= f(1)	-	$(x^3 + x^2 - 5x - 2) : (x - 2) = x^2 + 3x + 1$
		1	2	-3	-5			$-(x^3 - 2x^2)$
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>								
$x = 2$	↓	1	2	-5	-2	= f(2)	-	$3x^2 - 5x$
		1	3	1	0			$-(3x^2 - 6x)$
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>								
								$x - 2$
								$-(x - 2)$
<hr style="border: 0.5px solid black;"/>								

Lösung der quadratischen Gleichung:

$x^2 + 3x + 1 = 0$ mit $p = 3$ und $q = 1$ wird

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -0,38 \\ x_2 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx -2,62 \end{array} \right.$$

Die Achsenschnittpunkte:

$$P_y(0 | -2) \quad P_{x1}(2 | 0)$$

$$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \mid 0\right)$$

$$P_{x2}\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \mid 0\right)$$

3 Punkte

c) Die Wertetabelle:

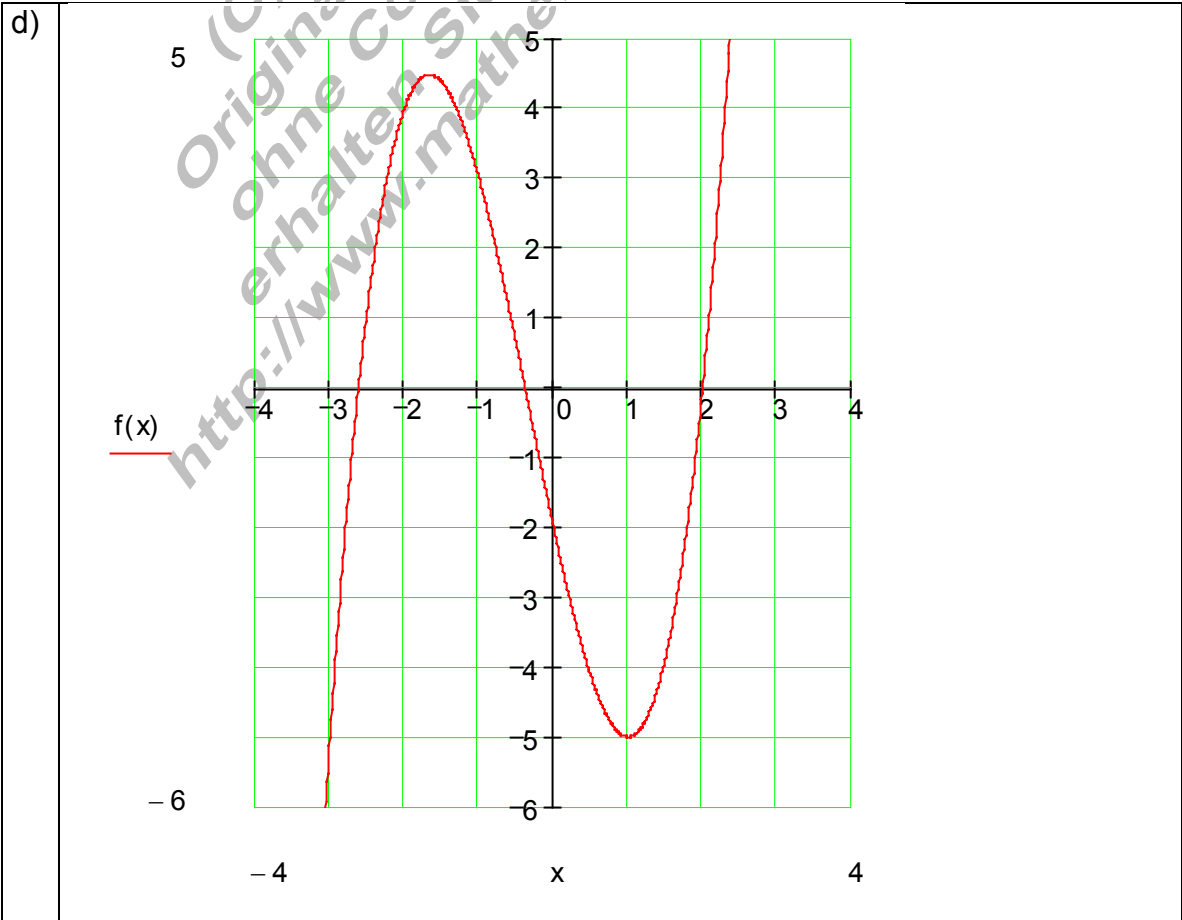
							P_y	
x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
f(x)	-5	1,13	4	4,38	3	0,63	-2	-4,13
	P_{\min}		P_{x1}		P_{\max}	P_{x2}	P_{x3}	
x	1	1,5	2	2,5	-1,6	-0,38	-2,62	
f(x)	-5	-3,88	0	7,38	4,48	0	0	

	1	1	-5	-2
x = -3	↓	<u>-3</u>	<u>6</u>	<u>-3</u>
	1	-2	1	-5 = f(-3)

	1	1	-5	-2
x = -2	↓	<u>-2</u>	<u>2</u>	<u>6</u>
	1	-1	-3	4 = f(-2)

	1	1	-5	-2
x = -1	↓	<u>-1</u>	<u>0</u>	<u>5</u>
	1	0	-5	3 = f(-1)

5 Punkte



3. Gegeben sind die Punkte $P_1(2|4)$; $P_2(4|0)$; $P_3(6|-4)$; $P_4(8|4)$
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
 - Tragen Sie die aus den gegebenen Punkten bekannten Werte in eine Wertetabelle und bestimmen Sie die Funktionswerte für folgende x- Werte:
 $x \in \{0; 1; 3; 5; 7\}$
 - Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Hochpunkt: $P_1(2|4)$ Tiefpunkt: $P_3(6|-4)$

Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 4$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie im Onlineshop:
<http://www.mathebrinkmann-shop.de>

12 Punkte

a) $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(2|4) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(4|0) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 0$

$P_3(6|-4) \Rightarrow f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = -4$

$P_4(8|4) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	4	
1	4	16	64	0	II - I
1	6	36	216	-4	III - I
1	8	64	512	4	IV - I
1	2	4	8	4	
0	2	12	56	-4	: 2
0	4	32	208	-8	: 4
0	6	60	504	0	: 6
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	-2	
0	1	8	52	-2	III - II
0	1	10	84	0	IV - II
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	-2	
0	0	2	24	0	
0	0	4	56	2	IV - 2 · III
1	2	4	8	4	
0	1	6	28	-2	
0	0	2	24	0	
0	0	0	8	2	

$8a_3 = 2|: 8$
 $\Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{4}$

$2a_2 + 24a_3 = 0$
 $\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 0| -6$
 $\Leftrightarrow 2a_2 = -6|: 2$
 $\Leftrightarrow a_2 = -3$

$a_1 + 6a_2 + 28a_3 = -2$
 $\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2| + 11$
 $\Leftrightarrow a_1 = 9$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4$
 $\Leftrightarrow a_0 + 18 - 12 + 2 = 4| - 8$
 $\Leftrightarrow a_0 = -4$

Die Funktionsgleichung:
 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 4$

4 Punkte

b)				P ₁ HP		P ₂		P ₃ TP		P ₄
	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	f(x)	-4	2,25	4	2,75	0	-2,75	-4	-2,25	4
		1/4	-3	9	-4					
	x = 1	↓	<u>1/4</u>	<u>-11/4</u>	<u>25/4</u>					
			1/4	-11/4	25/4	9/4	= f(1) = 2,25			
		1/4	-3	9	-4					
	x = 3	↓	<u>3/4</u>	<u>-27/4</u>	<u>27/4</u>					
			1/4	-9/4	9/4	11/4	= f(3) = 2,75			
		1/4	-3	9	-4					
	x = 5	↓	<u>5/4</u>	<u>-35/4</u>	<u>5/4</u>					
			1/4	-7/4	1/4	-11/4	= f(5) = -2,75			
		1/4	-3	9	-4					
	x = 7	↓	<u>7/4</u>	<u>-35/4</u>	<u>7/4</u>					
			1/4	-5/4	1/4	-9/4	= f(7) = -2,25			

4 Punkte

