Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 09.05.07**
SG15/25D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

1. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.
   (x in Stunden, f(x) in mg/h)

Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion $f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ modelliert.

a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:
Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.
Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 5 Stunden einen Maximalwert von ca. 3,8 mg/h zu erreichen.
Danach klingt sie wieder ab.
Nach ca. 12 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x) = \underbrace{2 \cdot x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v} \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - 2x \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(2 - \frac{2}{5}x\right)}_{u}\underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v}$$

$$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 2 - \frac{2}{5}x \Rightarrow u' = -\frac{2}{5}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(2 - \frac{2}{5}x\right) \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \underbrace{\left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v}$$

$$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = \frac{2}{25}x - \frac{4}{5} \Rightarrow u' = \frac{2}{25}; v = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}x} - \left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} = \left(\frac{6}{25} - \frac{2}{125}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{2}{5}x\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{2}{5}x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_e = 5}}$$ Stelle mit waagerechter Tangente

$$f''(x_e) = f''(5) = \left(\frac{2}{25} \cdot 5 - \frac{4}{5}\right) \cdot e^{-1} \approx -0{,}147 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_e = 5$$

$$f(x_e) = f(5) = 2 \cdot 5 \cdot e^{-1} \approx \underline{\underline{3{,}679}}$$

Nach 5 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 3,679 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{25}x - \frac{4}{5}\right) \cdot e^{-\frac{1}{5}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{25}x - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = 10}}$$ mögliche Wendestelle

$$f'''(x_w) = f'''(10) = \left(\frac{6}{25} - \frac{2}{125} \cdot 10\right) \cdot e^{-2} \approx 0{,}011 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w = 10$$

Nach 10 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 24 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \underbrace{2 \cdot x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{5}x}}_{v'}\,dx$$

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u'v\,dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2; v' = e^{-\frac{1}{5}x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = -5e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\int f(x)\,dx = 2x \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) - \int 2 \cdot \left(-5e^{-\frac{1}{5}x}\right) dx = -10x \cdot e^{-\frac{1}{5}x} + 10 \underbrace{\int e^{-\frac{1}{5}x}\,dx}_{-5e^{-\frac{1}{5}x}} = -10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \left[-10(x+5)e^{-\frac{1}{5}x}\right]_0^{24} = -290 \cdot e^{-\frac{24}{5}} + 50 \approx \underline{\underline{47,613}}$$

Nach 24 Stunden wurde eine Menge von 47,613 mg verabreicht.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.
b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.
c) Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.
d) Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese. (Ohne Nachweis).
e) Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte. $P_E\left(k-2 \mid \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$
f) Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x- Achse.
g) Verwenden Sie folgende Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) mit dem Taschenrechner.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	–3,4	–11,2	–27,7	–60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	–5,6	–18,5	–45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	–9,24	–30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	–15,2

h) Berechnen Sie für k = 4 die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

a) Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(k-0)e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = \frac{5}{4}\cdot k\cdot 1 = \frac{5}{4}k \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{5}{4}k\right)}}$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(k-x) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k \mid 0)}}$$

b) Die ersten beiden Ableitungen

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(k-x) \Rightarrow u' = -\frac{5}{4}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = -\frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8}\cdot(k-x)e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[\frac{5}{8}\cdot(k-x) - \frac{5}{4}\right]e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4} \Rightarrow u' = -\frac{5}{8}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = -\frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[\frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4}\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{-\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8}(k-x) - \frac{5}{4}\right]\right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$= \left[-\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{8}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[\frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

c) Extrempunkte

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4}\right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (k-x) - \frac{5}{4} = 0 \,|\, : \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow k - x - 2 = 0 \,|\, + x$$

$$\Leftrightarrow k - 2 = x \Rightarrow x_E = k - 2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E) \neq 0$

$$f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{\frac{5}{16}\left[k-(k-2)\right] - \frac{5}{4}\right\} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$= \left[\frac{5}{16}(k-k+2) - \frac{5}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \left(\frac{5}{8} - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \left(\frac{5}{8} - \frac{10}{8}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = -\frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}}_{>0} < 0$$

Bei $x = x_E = k - 2$ liegt ein relatives Maximum.

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x) e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4}\left[k-(k-2)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$= \frac{5}{4}(k-k+2) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1} \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2 \,\middle|\, \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$$

d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4}\right] \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x) - \frac{5}{4} = 0 \mid + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(k-x) = \frac{5}{4} \mid : \frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow k - x = 4 \mid -k \Leftrightarrow -x = 4 - k \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow x = k - 4$$

Wendestelle bei $x = x_W = k - 4$

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(k-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W) = f_k(k-4) = \frac{5}{4}\left[k-(k-4)\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 2} = 5 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 2}$$

$$\underline{\underline{P_{k_W}\left(k - 4 \mid 5 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 2}\right)}}$$

e) Die Ortskurve

$$P_{k_{Max}}\left(k - 2 \mid \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1}\right) \Rightarrow \underbrace{x = k - 2}_{(1)} \text{ und } \underbrace{y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1}}_{(2)}$$

$$x = k - 2 \Leftrightarrow k = x + 2 \text{ in } (2) \text{ eingesetzt: } y = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2) - 1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x + 1 - 1} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Funktionsgleichung der Ortskurve: $\underline{\underline{f_{OK}(x) = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$

f) Die Fläche A_k

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$$

$$\int f_k(x)\,dx = \int \frac{5}{4}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \int \frac{5}{4}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx - \int \frac{5}{4}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}k\cdot\underbrace{\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - \frac{5}{4}\cdot\underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = \frac{5}{4}k\cdot I - \frac{5}{4}\cdot II$$

$$I: \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$II: \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C \text{ wird}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = x\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{5}{4}k\cdot I - \frac{5}{4}\cdot II = \frac{5}{4}k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{4}\left(2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) + C$$

$$= \frac{5}{2}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[\left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}x + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}\cdot 0 + 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$$

$$= 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}k + 5\right)\cdot e^{0}\right] = 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left(\frac{5}{2}k + 5\right) = 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5$$

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right| = \underline{\underline{\left|5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5\right|}}$$

g) Die Graphen

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,62	0,85	1,12	1,38	1,52	1,25	0	–3,4	–11,2	–27,7	–60,9
$f_2(x)$	0,72	1,02	1,39	1,84	2,27	2,5	2,06	0	–5,6	–18,5	–45,7
$f_3(x)$	0,82	1,18	1,67	2,3	3,03	3,75	4,12	3,4	0	–9,24	–30,5
$f_4(x)$	0,92	1,35	1,95	2,76	3,79	5	6,18	6,8	5,6	0	–15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y}\left(0\,|\,\frac{5}{4}k\right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

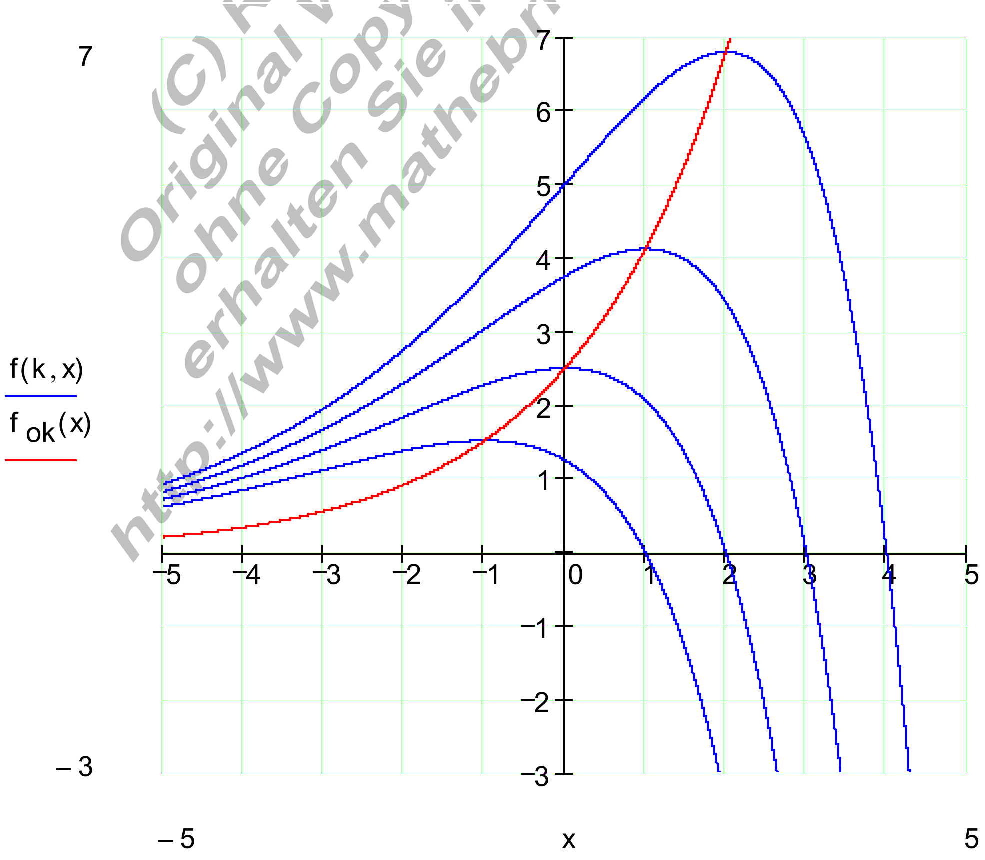
$P_{k_x}(k\,|\,0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{Max}}(-1\,|\,1{,}52);P_{2_{Max}}(0\,|\,2{,}5);P_{3_{Max}}(1\,|\,4{,}12);P_{4_{Max}}(2\,|\,6{,}8)$

$P_{k_W}\left(k-4\,|\,5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_W}(-3\,|\,1{,}12);P_{2_W}(-2\,|\,1{,}84);P_{3_W}(-1\,|\,3{,}03);P_{4_W}(0\,|\,5)$



h) Flächenberechnung für k = 4

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right| = \left|5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \frac{5}{2}k - 5\right|$$

$$A_4 = \left|\int_0^4 f_4(x)\,dx\right| = \left|5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - \frac{5}{2}\cdot 4 - 5\right| = \left|5\cdot e^2 - 10 - 5\right| = \left|5\cdot e^2 - 15\right| \approx \underline{\underline{21{,}95\,\text{FE}}}$$

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Mi 09.05.07**
SG15/25D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

1. Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Abbildung zeigt die Dosierung über einen Zeitraum von 24 Stunden.
   (x in Stunden, f(x) in mg/h)

Der Verlauf der Dosierung wird mit der Funktion $f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ modelliert.

a) Beschreiben Sie grob den Verlauf der Dosierung.

Verlaufsbeschreibung:
Die Dosierung beginnt bei 0 mg/h.
Sie steigt in den ersten Stunden an, um nach etwa 4 Stunden einen Maximalwert von ca. 4,3 mg/h zu erreichen.
Danach klingt sie wieder ab.
Nach ca. 8 Stunden ist die Abnahme am stärksten.

b) Nach welcher Zeit ist die Dosierung maximal? Wie hoch ist sie dann.

$$f(x)=\underbrace{3\cdot x}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=3x\Rightarrow u'=3;v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x)=3\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-3x\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\underbrace{\left(3-\frac{3}{4}x\right)}_{u}\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}$$

$$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=3-\frac{3}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{3}{4};v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-\left(3-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\underbrace{\left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\right)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v}$$

$$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u=\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\Rightarrow u'=\frac{3}{16};v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-\left(\frac{3}{16}x-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}=\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{64}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(3-\frac{3}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow \underline{\underline{x_e=4}}\text{ Stelle mit waagerechter Tangente}$$

$$f''(x_e)=f''(4)=\left(\frac{3}{16}\cdot 4-\frac{3}{2}\right)\cdot e^{-1}\approx -0{,}276<0\Rightarrow\text{rel. Max. bei }x_e=4$$

$$f(x_e)=f(4)=3\cdot 4\cdot e^{-1}\approx\underline{\underline{4{,}415}}$$

Nach 4 Stunden ist die Dosierung maximal, sie beträgt dann 4,415 mg/h

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_w = 8}} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{64} \cdot 8\right) \cdot e^{-2} \approx 0{,}025 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_w = 8$$

Nach 8 Stunden ist die Abnahme der Dosierung am stärksten.

d) Bestimmen Sie die Menge des verabreichten Medikamentes, wenn die Infusion 20 Stunden durchgeführt wird.

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M = \int_0^{20} f(x)\,dx = \int_0^{20} \underbrace{3 \cdot x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{4}x}}_{v'}\,dx$$

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u'v\,dx$$

$$u = 3x \Rightarrow u' = 3; v' = e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$\int f(x)\,dx = 3x \cdot \left(-4e^{-\frac{1}{4}x}\right) - \int 3 \cdot \left(-4e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx = -12x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 12\underbrace{\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx}_{-4e^{-\frac{1}{4}x}} = -12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$M = \int_0^{20} f(x)\,dx = \left[-12(x+4)e^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^{20} = -288 \cdot e^{-5} + 48 \approx \underline{\underline{46{,}059}}$$

Nach 20 Stunden wurde eine Menge von 46,059 mg verabreicht.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f_k auf Achsenschnittpunkte und berechnen Sie diese.
b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von $f_k(x)$.
c) Untersuchen Sie f_k auf Extrempunkte und berechnen Sie diese.
d) Untersuchen Sie f_k auf Wendepunkte und berechnen Sie diese. (Ohne Nachweis).
e) Berechnen Sie die Ortskurve $f_{ok}(x)$ für die Extrempunkte. $P_E\left(k-2 \,|\, -\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$
f) Bestimmen Sie die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten und der x- Achse.
g) Verwenden Sie folgende Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen für $f_1(x)$; $f_2(x)$; $f_3(x)$; $f_4(x)$ und die Ortskurve $f_{ok}(x)$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie die Werte der markanten Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte) mit dem Taschenrechner.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	–0,62	–0,85	–1,12	–1,38	–1,52	–1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	–0,72	–1,02	–1,39	–1,84	–2,27	–2,5	–2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	–0,82	–1,18	–1,67	–2,3	–3,03	–3,75	–4,12	–3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	–0,92	–1,35	–1,95	–2,76	–3,79	–5	–6,18	–6,8	–5,6	0	15,2

h) Berechnen Sie für k = 4 die Fläche A_4 und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem.

a) Achsenschnittpunkte

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$P_y : f_k(0) = \frac{5}{4}(0-k)e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = -\frac{5}{4}\cdot k\cdot 1 = -\frac{5}{4}k \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \,|\, -\frac{5}{4}k\right)}}$$

$$P_x : f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k)\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(x-k) = 0 \Leftrightarrow x = k \Leftrightarrow \underline{\underline{P_x(k \,|\, 0)}}$$

b) Die ersten beiden Ableitungen

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{4}(x-k) \Rightarrow u' = \frac{5}{4}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{4}(x-k)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{5}{8}\cdot(x-k)e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[\frac{5}{8}\cdot(x-k)+\frac{5}{4}\right]e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4} \Rightarrow u' = \frac{5}{8}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{5}{8} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left[\frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4}\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left\{\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8}(x-k) + \frac{5}{4}\right]\right\} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$= \left[\frac{5}{8} + \frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{8}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left[\frac{5}{16}(x-k) + \frac{5}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

c) Extrempunkte

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4}\right] \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{8} \cdot (x-k) + \frac{5}{4} = 0 \,|\, : \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow x - k + 2 = 0 \,|\, + k - 2$$

$$\Leftrightarrow x \Rightarrow x_E = k - 2 \text{ ist mögliche Extremstelle.}$$

Überprüfung mit der 2. Ableitung: $f_k''(x_E) \neq 0$

$$f_k''(x_E) = f_k''(k-2) = \left\{\frac{5}{16}\left[(k-2) - k\right] + \frac{5}{4}\right\} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$= \left[\frac{5}{16}(k-2-k) + \frac{5}{4}\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{10}{8}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = \frac{5}{8} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}}_{>0} > 0$$

Bei $x = x_E = k - 2$ liegt ein relatives Minimum.

$$f_k(x) = \frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_E) = f_k(k-2) = \frac{5}{4}\left[(k-2) - k\right] \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}$$

$$= \frac{5}{4}(k-2-k) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1} \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, -\frac{5}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$$

d) Der Wendepunkt

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{4}\right]\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k)+\frac{5}{4}=0 \,|-\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}(x-k)=-\frac{5}{4} \,|:\frac{5}{16}$$

$$\Leftrightarrow x-k=-4 \,|+k \Leftrightarrow x=k-4$$

Wendestelle bei $x = x_W = k-4$

$$f_k(x)=\frac{5}{4}(x-k)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k(x_W)=f_k(k-4)=\frac{5}{4}\left[(k-4)-k\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)}=\frac{5}{4}\cdot(-4)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}=-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}$$

$$\underline{\underline{P_{k_W}\left(k-4 \,|\, -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$$

e) Die Ortskurve

$$P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, -\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right) \Rightarrow \underbrace{x=k-2}_{(1)} \text{ und } \underbrace{y=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{(2)}$$

$x=k-2 \Leftrightarrow k=x+2$ in (2) eingesetzt: $y=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1}=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1}=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

Funktionsgleichung der Ortskurve: $\underline{\underline{f_{OK}(x)=-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$

f) Die Fläche A_k

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x)\,dx \right|$$

$$\int f_k(x)\,dx = \int \frac{5}{4}(x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \int \frac{5}{4}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx - \int \frac{5}{4}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{5}{4}\underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{I}} - \frac{5}{4}k\cdot \underbrace{\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{II}} = \frac{5}{4}\cdot \mathrm{I} - \frac{5}{4}k\cdot \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II}: \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\mathrm{I}: \int \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \text{ mit } u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$\text{und } v' = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C \text{ wird}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = x\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \int 1\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{5}{4}\cdot \mathrm{I} - \frac{5}{4}k\cdot \mathrm{II} = \frac{5}{4}\left(2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) - \frac{5}{4}k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \frac{5}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \frac{5}{2}k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[\left(\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= \left(\frac{5}{2}k - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(\frac{5}{2}\cdot 0 - \frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right]$$

$$= -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left[\left(-\frac{5}{2}k - 5\right)\cdot e^{0}\right] = -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5$$

$$A_k = \left| \int_0^k f_k(x)\,dx \right| = \underline{\underline{\left| -5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5 \right|}}$$

g) Die Graphen

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	–0,62	–0,85	–1,12	–1,38	–1,52	–1,25	0	3,4	11,2	27,7	60,9
$f_2(x)$	–0,72	–1,02	–1,39	–1,84	–2,27	–2,5	–2,06	0	5,6	18,4	45,7
$f_3(x)$	–0,82	–1,18	–1,67	–2,3	–3,03	–3,75	–4,12	–3,4	0	9,24	30,5
$f_4(x)$	–0,92	–1,35	–1,95	–2,76	–3,79	–5	–6,18	–6,8	–5,6	0	15,2

Markante Punkte:

$P_{k_y}\left(0\,|\,-\frac{5}{4}k\right)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

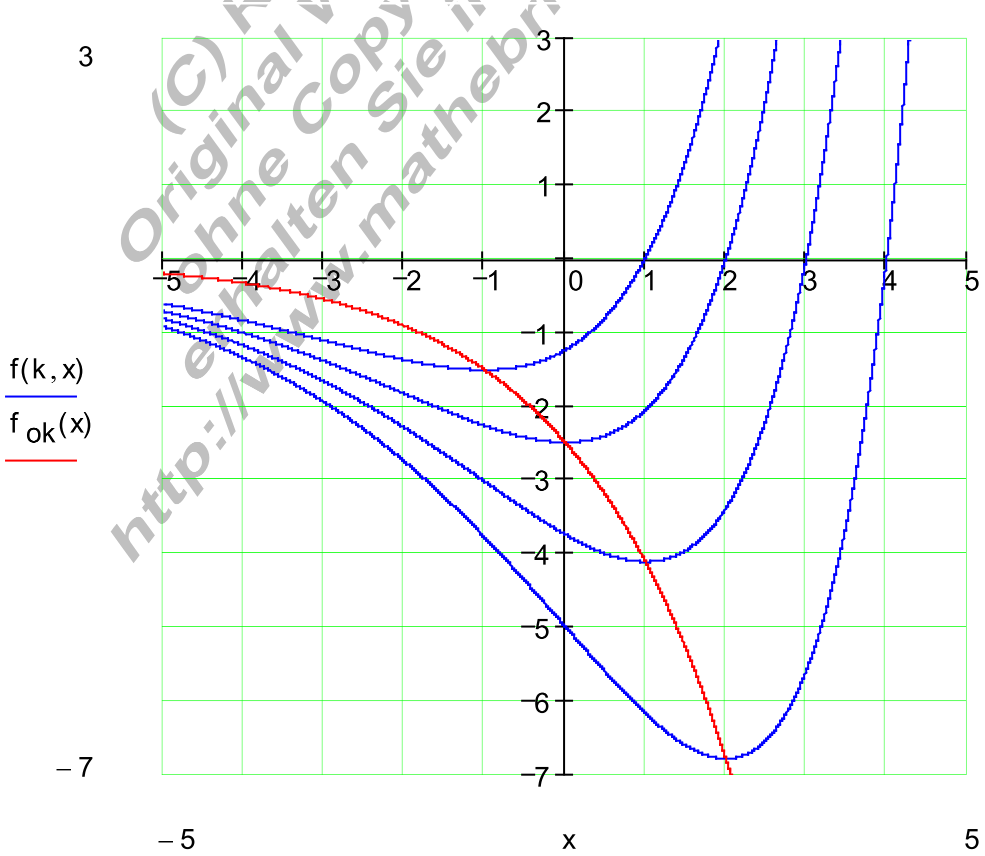
$P_{k_x}(k\,|\,0)$ Die Werte sind bereits in der Tabelle enthalten.

$P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,-\frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_{Max}}(-1\,|\,-1{,}52); P_{2_{Max}}(0\,|\,-2{,}5); P_{3_{Max}}(1\,|\,-4{,}12); P_{4_{Max}}(2\,|\,-6{,}8)$

$P_{k_W}\left(k-4\,|\,-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$ Aus der Wertetabelle ablesbar:

$P_{1_W}(-3\,|\,-1{,}12); P_{2_W}(-2\,|\,-1{,}84); P_{3_W}(-1\,|\,-3{,}03); P_{4_W}(0\,|\,-5)$



h) Flächenberechnung für k = 4

$$A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right| = \underline{\underline{\left|-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + \frac{5}{2}k + 5\right|}}$$

$$A_4 = \left|\int_0^4 f_4(x)\,dx\right| = \left|-5\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + \frac{5}{2}\cdot 4 + 5\right| = \left|-5\cdot e^2 + 10 + 5\right| = \left|-5\cdot e^2 + 15\right| \approx \underline{\underline{21{,}95\,\text{FE}}}$$