Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 05.04.11**
SG10 D Gruppe A	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1. Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Scheitelpunkte.

$f_1(x) = x^2 + 4x + 3$ Scheitelpunkt: $S_1(-2 \mid -1)$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ Scheitelpunkt: $S_2(1 \mid -2)$

a) Wie lautet die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung $f_1(x)$ und $f_2(x)$?

b) Zeichnen Sie beide Parabeln in ein Koordinatensystem.

A1 Ausführliche Lösungen

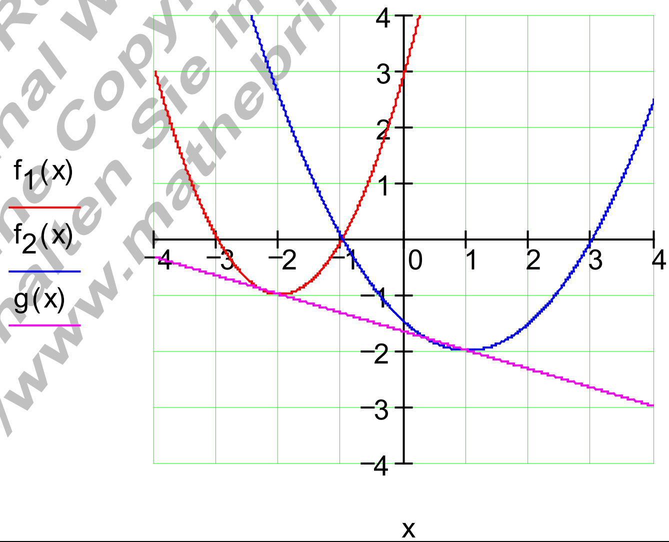
a) $f_1(x) = x^2 + 4x + 3 \quad S_1(-2 \mid -1)$

$\Rightarrow f_1(x) = (x+2)^2 - 1$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \quad S_2(1 \mid -2)$

$\Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$

b)



2. Es soll untersucht werden ob eine Gerade eine Parabel schneidet.

a) Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen.

b) Welche Möglichkeiten gibt es und was bedeutet das für die Diskriminante?

A2 Ausführliche Lösungen

a) 1. Die beiden Funktionsgleichungen werden gleichgesetzt und nach der Variablen x aufgelöst. Dies führt auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung die x- Werte der Schnittpunkte sind.
2. Die x- Werte werden in eine der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt. Daraus enthält man die y- Werte der Schnittpunkte.

b) Die Gerade kann die Parabel in 2 Punkten schneiden ($D > 0$).
Die Gerade kann die Parabel in einem Punkt berühren ($D = 0$).
Die Gerade hat mit der Parabel keinen Punkt gemeinsam ($D < 0$).

3. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln.
$f(x) = 2x^2 - 4x + 8;\quad g(x) = x^2 + 2x - 1$

A3 Ausführliche Lösung

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 8 = x^2 + 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$\Rightarrow p = -6;\, q = 9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = 3$$
$$\Rightarrow g(3) = 3^2 + 2\cdot 3 - 1 = 14 \Rightarrow \underline{\underline{S_{1/2}(3\,|\,14)}} \text{ Berührungspunkt}$$

4. Eine Parabel geht durch die drei Punkte $P_1(-2\,|\,4);\, P_2(1\,|\,4);\, P_3(3\,|\,-6)$
Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und die Scheitelpunktform. Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
Kontrolllösung: $f(x) = -x^2 - x + 6$

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$P_1(-2\,|\,4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(1\,|\,4): f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(3\,|\,-6): f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -6$

a_0	a_1	a_2	
1	−2	4	4
1	1	1	4 II − I
1	3	9	−6 III − I
1	−2	4	4
0	3	−3	0 | : 3
0	5	5	−10 | : (−5)
1	−2	4	4
0	1	−1	0
0	−1	−1	2 III + II
1	−2	4	4
0	1	−1	0
0	0	−2	2

$-2a_2 = 2 \,|\, : (-2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$

$a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 - 1\cdot(-1) = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 4 \Leftrightarrow a_0 - 2\cdot(-1) + 4\cdot(-1) = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 4 = 4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$

$\underline{\underline{f(x) = -x^2 - x + 6}}$

$P_1(-2\,|\,4): f(-2) = -(-2)^2 - 1\cdot(-2) + 6 = 4$

$P_2(1\,|\,4): f(1) = -1^2 - 1\cdot 1 + 6 = -1 - 1 + 6 = 4$

$P_3(3\,|\,-6): f(3) = -3^2 - 1\cdot 3 + 6 = -6$

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Achsenschnittpunkte:

$f(x) = -x^2 - x + 6 \qquad f(0) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,6)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$p = 1; q = -6 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{ll} x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2 & \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}} \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3 & \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}(-3\,|\,0)}} \end{array} \right.$$

A4 Ausführliche Lösung

Der Scheitelpunkt:

$f(x) = -x^2 - x + 6$

$x_{sp} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

$y_{sp} = f(x_{sp}) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$

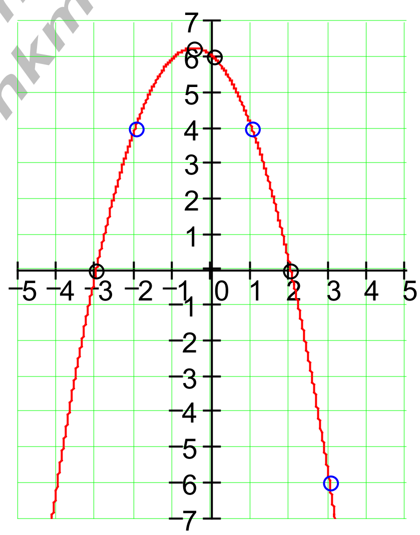
$= -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4}$

Scheitelpunkt: $\underline{\underline{P_{sp}\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{25}{4}\right)}}$

Scheitelpunktform:

$\underline{\underline{f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}}$

Der Graph:

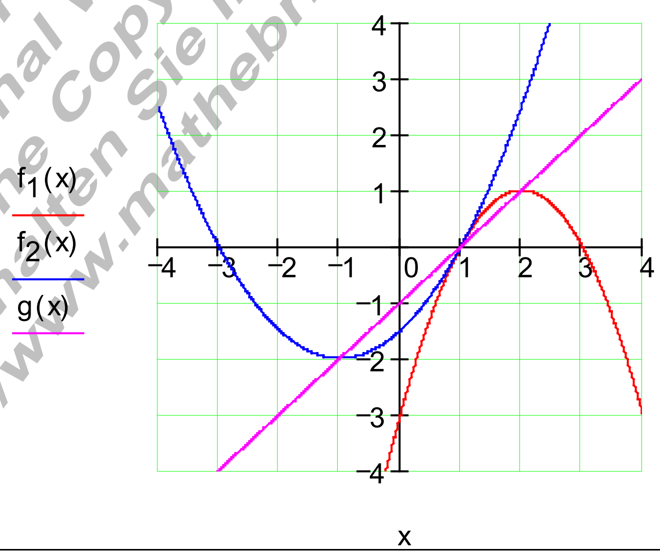


Viel Erfolg

Klassenarbeit	**Mathematik**	**Bearbeitungszeit 90 min.**	**Di 05.04.11**
SG10 D Gruppe B	**NAME:**		

Hilfsmittel: Taschenrechner
Alle Ergebnisse sind soweit möglich durch Rechnung zu begründen.

1.		Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln und deren Scheitelpunkte. $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$ Scheitelpunkt: $S_1(2 \mid 1)$ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ Scheitelpunkt: $S_2(-1 \mid -2)$
	a)	Wie lautet die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung $f_1(x)$ und $f_2(x)$?
	b)	Zeichnen Sie beide Parabeln in ein Koordinatensystem.

A1	Ausführliche Lösungen		
	a)	$f_1(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad S_1(2 \mid 1)$ $\Rightarrow f_1(x) = -(x-2)^2 + 1$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \quad S_2(-1 \mid -2)$ $\Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$
	b)		

2.	Es soll untersucht werden ob zwei Parabeln sich schneiden..	
	a)	Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen.
	b)	Welche Möglichkeiten gibt es und was bedeutet das für die Diskriminante?

A2	Ausführliche Lösungen	
	a)	1. Die beiden Funktionsgleichungen werden gleichgesetzt und nach der Variablen x aufgelöst. Dies führt auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung die x- Werte der Schnittpunkte sind. 2. Die x- Werte werden in eine der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt. Daraus enthält man die y- Werte der Schnittpunkte.
	b)	Die Parabeln können sich in 2 Punkten schneiden (D > 0). Die Parabeln können sich in einem Punkt berühren (D = 0). Die Parabeln haben keinen Punkt gemeinsam (D < 0). Falls keine quadratische Gleichung entsteht, schneiden sich die Parabeln in einem Punkt.

3.	Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln. $f(x) = -x^2 + 3x - 1{,}5\,; \quad g(x) = -x^2 - x + 2{,}5$

A3	Ausführliche Lösung
	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 1{,}5 = -x^2 - x + 2{,}5$ $\Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\Rightarrow f(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 - 1{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{S(1\,|\,0{,}5)}}$ Die Parabeln schneiden sich in einem Punkt.

4. Eine Parabel geht durch die drei Punkte $P_1(-3\,|\,10)\,;P_2(1\,|\,-2)\,;P_3(3\,|\,4)$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt und die Scheitelpunktform. Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.

Kontrolllösung : $f(x) = x^2 - x - 2$

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$P_1(-3\,|\,10) : f(-3) = 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 10$

$P_2(1\,|\,-2) : f(1) = 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(3\,|\,4) : f(3) = 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	
1	−3	9	10
1	1	1	−2 II − I
1	3	9	4 III − I
1	−3	9	10
0	4	−8	−12
0	6	0	−6

$6a_1 = -6 \mid :6$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$4a_1 - 8a_2 = -12 \Leftrightarrow 4\cdot(-1) - 8a_2 = -12$

$\Leftrightarrow -8a_2 - 4 = -12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 1}$

$a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 10 \Leftrightarrow a_0 - 3\cdot(-1) + 9\cdot 1 = 10$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 9 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$\underline{\underline{f(x) = x^2 - x - 2}}$

$P_1(-3\,|\,10) : f(-3) = (-3)^2 - 1\cdot(-3) - 2 = 9 + 3 - 2 = 10$

$P_2(1\,|\,-2) : f(1) = 1^2 - 1\cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 2 = -2$

$P_3(3\,|\,4) : f(2) = 3^2 - 1\cdot 3 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$

A4 Ausführliche Lösung

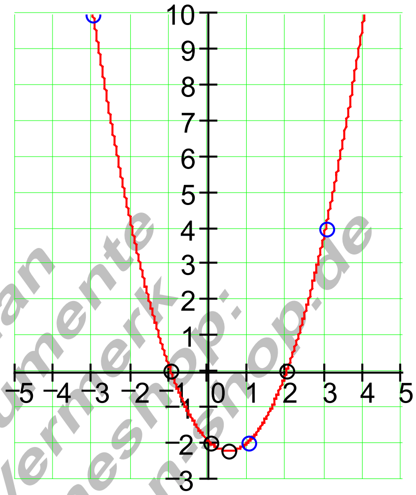
Berechnung der Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^2 - x - 2 \qquad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-2)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$$p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}} \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}(-1\,|\,0)}} \end{array} \right.$$

<table>
<tr><td rowspan="2">A4</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td>Der Scheitelpunkt:
$f(x) = x^2 - x - 2$
$x_{sp} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$
$y_{sp} = f(x_{sp}) = f\left(\frac{1}{2}\right)$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$
$\underline{\underline{\text{Scheitelpunkt}: P_{sp}\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{9}{4}\right)}}$
Scheitelpunktform:
$\underline{\underline{f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}}$</td><td>Der Graph:

</td></tr>
</table>

Viel Erfolg