Lösungen Stichproben und Zählstrategien III

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe
	In einer Urne befinden sich 14 gleichgroße Kärtchen, auf denen jeweils nur ein Buchstabe aufgedruckt ist.

Kärtchen mit den Buchstaben	A	E	N	O	T
Anzahl der Kärtchen	1	4	5	1	3

Es werden folgende Zufallsexperimente durchgeführt:

a) Aus der Urne werden mit einem Griff zwei Kärtchen gezogen.
Folgende Ereignisse sind definiert:
A: Die Buchstaben auf den beiden Kärtchen sind gleich.
B: Die zwei gezogenen Buchstaben sind Konsonanten.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
$P(A)$; $P(B)$; $P(A \cup B)$; $P_B(A)$ und antworten Sie in Satzform.

b) Der Urne werden nacheinander fünf Kärtchen entnommen und der Reihe nach nebeneinander gelegt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort TANNE entsteht?

c) Fünf Kärtchen werden mit einem Griff der Urne entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mit den gezogenen Buchstaben das Wort TANTE legen lässt?

d) Jens schlägt folgendes Spiel vor:
Aus der Urne werden mit einem Griff drei Kärtchen gezogen.
Es wird nach folgender Tabelle ausgezahlt:

gezogene Buchstaben mit	Auszahlung
1 Vokal	1€
2 Vokalen	7€
3 Vokalen	21€
E, E, E	28€

Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

e) Aus der Urne werden mit einem Griff zwei Kärtchen gezogen.

(1): Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das die gezogenen Buchstaben Vokale <u>oder</u> Konsonanten sind.
(2): Wie viel Kärtchen mit Konsonanten müssen zusätzlich in die Urne gegeben werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis unter (1) gleich 0,5 ist?

A1	Ausführliche Lösung
	Die Urne enthält insgesamt 14 Buchstaben:
	$1 \cdot A \quad 4 \cdot E \quad 5 \cdot N \quad 1 \cdot O$ und $3 \cdot T$

A1 **Ausführliche Lösung**

a) A bedeutet $EE \vee NN \vee TT \Rightarrow P(A) = P(EE) + P(NN) + P(TT)$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} = \underline{\underline{\frac{19}{91} \approx 0{,}209}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben gleich sind ist 0,209.

B bedeutet $NN \vee TT \vee NT \Rightarrow P(B) = P(NN) + P(TT) + P(NT)$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{14}{2}} = \underline{\underline{\frac{28}{91} = \frac{4}{13} \approx 0{,}307}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben Konsonanten sind ist 0,307.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ mit $A \cap B = NN \vee TT$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{13}{91} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{91} + \frac{28}{91} - \frac{13}{91} = \underline{\underline{\frac{34}{91} \approx 0{,}374}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben gleich oder Konsonanten sind ist 0,374.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13}{91} : \frac{28}{91} = \underline{\underline{\frac{13}{28} \approx 0{,}464}}$$

Wenn man weiß, dass die Buchstaben auf beiden Karten Konsonanten sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das es sich um gleiche Buchstaben handelt 0,464.

A1 **Ausführliche Lösung**

b) 5 Karten angeordnet bilden das Wort TANNE

$$P(TANNE) = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{1001} \approx 0{,}001}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort **TANNE** entsteht, ist etwa 0,001.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	c)	5 Karten mit einem Griff. Benötigt werden: $TT \wedge A \wedge N \wedge E$ $P(TANTE) = \dfrac{\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} = \underline{\underline{\dfrac{30}{1001} \approx 0{,}03}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort **TANTE** legen lässt, ist etwa 0,03.

A1 **Ausführliche Lösung**

d) Unter den 14 Buchstaben gibt es 6 Vokale und 8 Konsonanten.
Die Werte der Zufallsvariablen X sind:

	1 Vokal	2 Vokale	3 Vokale ohne EEE	EEE	kein Vokal
$X = x_i$	1	7	21	28	0

Deren Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(X = x_1) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{42}{91} \text{ für 1 Vokal und 2 Konsonanten}$$

$$P(X = x_2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{30}{91} \text{ für 2 Vokale und 1 Konsonanten}$$

$$P(X = x_4) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{1}{91} \text{ für EEE}$$

$$P(X = x_3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} - \frac{1}{91} = \frac{4}{91} \text{ für 3 Vokale ohne EEE}$$

$$P(X = x_5) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{14}{91} \text{ für 3 Konsonanten}$$

Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariablen und Berechnung des Erwartungswerts:

$X = x_i$	0	1	7	21	28
$P(X = x_i)$	$\frac{14}{91}$	$\frac{42}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{4}{91}$	$\frac{1}{91}$

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot \frac{14}{91} + 1 \cdot \frac{42}{91} + 7 \cdot \frac{30}{91} + 21 \cdot \frac{4}{91} + 28 \cdot \frac{1}{91} = \frac{364}{91} = \underline{\underline{4}}$$

Bei einem Einsatz von 4 € ist das Spiel fair.

A1	**Ausführliche Lösung**		
	e)	(1):	6 Vokale und 8 Konsonanten befinden sich in der Urne. $$P(VV \vee KK) = P(VV) + P(KK) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{\binom{6}{2}+\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}$$

A1	**Ausführliche Lösung**		
	e)	(2):	Werden x Vokale dazu getan, dann gilt für die Anzahl der Vokale: 8 + x Mit $P(VV \vee KK) = 0{,}5$ gilt: $$P(VV \vee KK) = \frac{\binom{6}{2}+\binom{8+x}{2}}{\binom{14+x}{2}} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}+\frac{(8+x)\cdot(7+x)}{2\cdot 1}}{\frac{(14+x)\cdot(13+x)}{2\cdot 1}}$$ $$= \frac{30+(8+x)\cdot(7+x)}{(14+x)\cdot(13+x)} = 0{,}5$$ $$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -5 \wedge x_2 = 2}}$$ Es müssen 2 Karten mit Konsonanten dazugegeben werden. Das gleiche Ergebnis (P = 0,5) würde man erhalten, wenn man 5 Konsonanten entfernt.