Lösungen Bedingte Wahrscheinlichkeit I

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

In einem Großversuch wurde ein Medikament getestet. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle festgehalten. Dabei bedeuten:

M: Medikament genommen
$\overline{M}$: Placebo genommen
G: gesund geworden
$\overline{G}$: nicht gesund geworden

	G	$\overline{G}$	Summe
M	6312	87	6399
$\overline{M}$	312	4390	4702
Summe	6624	4477	11101

a) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten in einer 4 – Feldtafel dar und zeichnen Sie das dazugehörige Baumdiagramm.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Medikament eingenommen hat, zu gesunden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Placebo eingenommen hat, nicht zu gesunden?

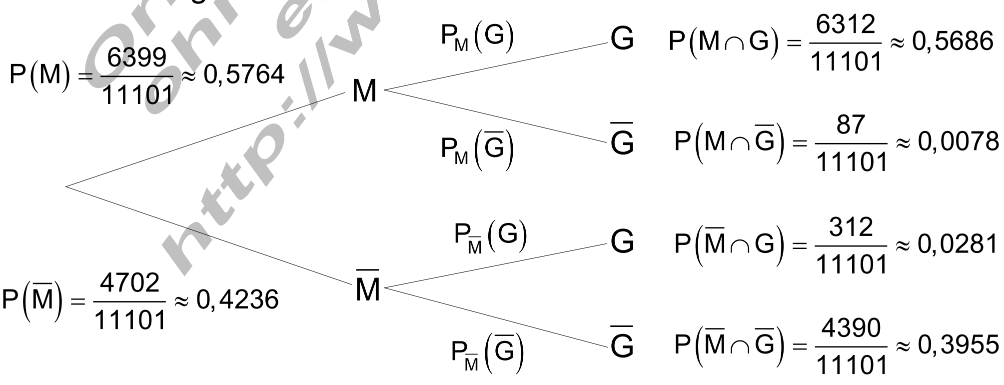
A1 Ausführliche Lösung

a) Die 4 – Feldtafel:

M: Medikament genommen $\overline{M}$: Placebo genommen
G: gesund geworden $\overline{G}$: nicht gesund geworden

	G	$\overline{G}$	
M	$\frac{6312}{11101} \approx 0{,}5686$	$\frac{87}{11101} \approx 0{,}0078$	$\frac{6399}{11101} \approx 0{,}5764$
$\overline{M}$	$\frac{312}{11101} \approx 0{,}0281$	$\frac{4390}{11101} \approx 0{,}3955$	$\frac{4702}{11101} \approx 0{,}4236$
	$\frac{6624}{11101} \approx 0{,}5967$	$\frac{4477}{11101} \approx 0{,}4033$	$\frac{11101}{11101} = 1$

Das Baumdiagramm:



A1 Ausführliche Lösung

b)

$$P_M(G)=\frac{P(M\cap G)}{P(M)}=\frac{\frac{6312}{11101}}{\frac{6399}{11101}}=\frac{6312}{6399}\approx 0{,}9864$$

Bei einer Person, von der man weiß, dass sie das Medikament eingenommen hat, ist die Wahrscheinlichkeit 0,9864, dass sie gesund geworden ist.

A1 Ausführliche Lösung

c)

$$P_{\overline{M}}(\overline{G})=\frac{P(\overline{M}\cap\overline{G})}{P(\overline{M})}=\frac{\frac{4390}{11101}}{\frac{4702}{11101}}=\frac{4390}{4702}\approx 0{,}9336$$

Bei einer Person, von der man weiß, dass sie ein Placebo eingenommen hat,
ist die Wahrscheinlichkeit 0,9336, dass sie nicht gesund geworden ist.

A2 Aufgabe

In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.
Die Ergebnisse werden in einer 4 – Feldtafel dargestellt.

Gruppe	B (erkrankt)	$\overline{B}$ (nicht erkrankt)	Summe
A mit Impfung	60	540	600
$\overline{A}$ ohne Impfung	120	180	300
Summe	180	720	900

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B: „Person erkrankt“.
Berechnen Sie:

$P(A)$ | $P(B)$ | $P(A\cap B)$ | $P_A(B)$ | $P_B(A)$ | $P(\overline{A}\cap B)$ | $P_{\overline{A}}(B)$

Geben Sie die Bedeutung der einzelnen Ergebnisse in Textform an.

A2	**Ausführliche Lösung**	
	$A:$ Die Person ist geimpft $B:$ Die Person ist erkrankt	$\overline{A}:$ Die Person ist nicht geimpft $\overline{B}:$ Die Person ist nicht erkrankt
	$P(A)=\frac{600}{900}=0,\overline{6}$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine geimpfte Person zu finden 0,666...
	$P(B)=\frac{180}{900}=0,2$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine erkrankte Person zu finden 0,2.
	$P(A\cap B)=\frac{60}{900}=0,0\overline{6}$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine trotz Impfung erkrankte Person zu finden 0,06666...
	$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{60}{900}}{\frac{600}{900}}=\frac{60}{600}=0,1$	Eine Person, von der man weiß, dass sie geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 dennoch erkrankt.
	$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{60}{900}}{\frac{180}{900}}=\frac{60}{180}=0,\overline{3}$	Eine Person, von der man weiß, dass sie erkrankt ist, wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,333... geimpft.
	$P(\overline{A}\cap B)=\frac{120}{900}=0,1\overline{3}$	Bei der zufälligen Auswahl einer Person, ist die Wahrscheinlichkeit eine nicht geimpfte und auch erkrankte Person zu finden 0,1333...
	$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{120}{900}}{\frac{300}{900}}=\frac{120}{300}=0,4$	Eine Person, von der man weiß, dass sie nicht geimpft wurde ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 auch erkrankt.

A3 **Aufgabe**

Mehr Abiturientinnen als Abiturienten:

52,4% der 244600 Jugendlichen, die am Ende des vergangenen Schuljahres ihre Schule mit der allgemeinen Hochschulreife verließen, waren Frauen.
In den neuen Ländern und Berlin liegt der Frauenanteil mit 59,1% deutlich höher als im früheren Bundesgebiet (50,8%).

a) Stellen Sie eine 4 – Feldtafel auf, die diesen Sachzusammenhang beschreibt.

b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit dem
1. Merkmal „Herkunft“ (Ost, West) und dem
2. Merkmal „Geschlecht“ (männlich, weiblich).

c) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit dem
1. Merkmal „Geschlecht“ (männlich, weiblich) und dem
2. Merkmal „Herkunft“ (Ost, West).

d) Aus der Gesamtheit aller Abiturientinnen und Abiturienten des betrachteten Jahrgangs wurde eine Person zufällig ausgewählt.
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt diese Person aus Ostdeutschland?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die ausgewählte Person eine Frau?
(3) Falls diese Person aus Ostdeutschland kommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies ein Mann?
(4) Falls diese Person eine Frau ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus Westdeutschland?

A3 **Ausführliche Lösung**

a) A: Person stammt aus den alten Bundesländern (West)
$\overline{A}$: Person stammt aus den neuen Bundesländern (Ost)
B: Person ist weiblich $\overline{B}$: Person ist männlich

Summe weiblich: $0{,}524 \cdot 244600 = 128170{,}4 \approx 128170$
Summe männlich: $244600 - 128170 = 116430$

x: Gesamtheit aller Absolventen aus West
$244600 - x$: Gesamtheit aller Absolventen aus Ost
Anzahl der Abiturientinnen aus West 50,8% von x.
Anzahl der Abiturientinnen aus Ost 59,1% von $(244600 - x)$.

$$\underbrace{0{,}508 \cdot x}_{\text{weiblich West}} + \underbrace{0{,}591 \cdot (244600 - x)}_{\text{weiblich Ost}} = \underbrace{128170}_{\text{Summe weiblich}}$$

$$0{,}508x + 0{,}591 \cdot 244600 - 0{,}591x = 128170 \,|\, -0{,}591 \cdot 244600$$

$$\Leftrightarrow -0{,}083x = -16388{,}6 \,|\, : (-0{,}083)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-16388{,}6}{-0{,}083} = 197453{,}012 \approx 197453$$

Gesamtheit aller Absolventen aus West.

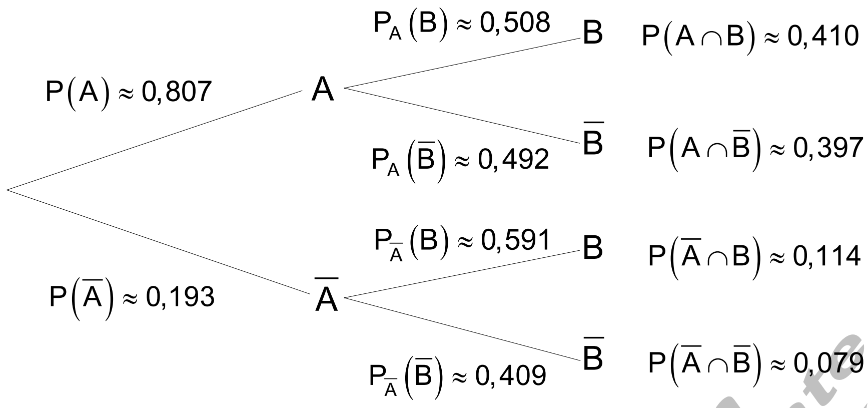
weiblich West: $0{,}508 \cdot x = 0{,}508 \cdot 197453 = 100306{,}124 \approx 100306$
weiblich Ost: $128170 - 100306 = 27864$
männlich West: $197453 - 100306 = 97147$
männlich Ost: $116430 - 97147 = 19283$

Die 4 – Feldtafel:

	B (weiblich)	$\overline{B}$ (männlich)	
A (West)	100306	97147	197453
$\overline{A}$ (Ost)	27864	19283	47147
	128170	116430	244600

A3 **Ausführliche Lösung**

b)



Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P(A) = \frac{197453}{244600} \approx 0{,}807 \qquad P(\overline{A}) = \frac{47147}{244600} \approx 0{,}193$$

$$P(A \cap B) = \frac{100306}{244600} \approx 0{,}410 \qquad P(A \cap \overline{B}) = \frac{97147}{244600} \approx 0{,}397$$

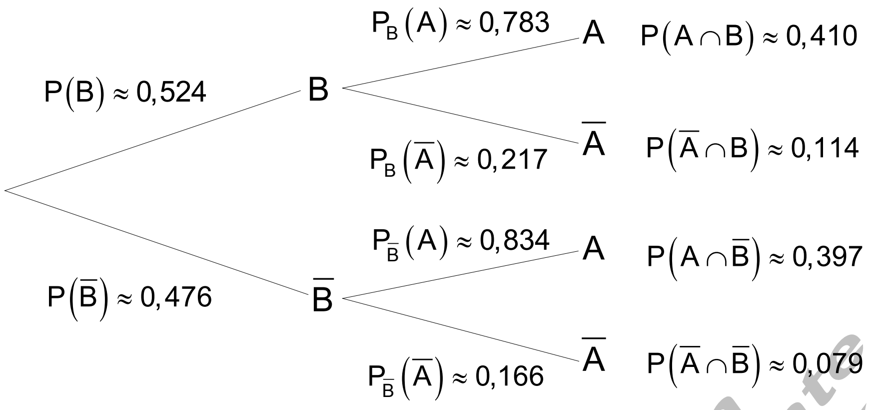
$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{27864}{244600} \approx 0{,}114 \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{19283}{244600} \approx 0{,}079$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{100306}{197453} \approx 0{,}508 \qquad P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{97147}{197453} \approx 0{,}492$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{27864}{47147} \approx 0{,}591 \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{19283}{47147} \approx 0{,}409$$

A3 Ausführliche Lösung

c)



Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P(B) = \frac{128170}{244600} \approx 0{,}524 \qquad P(\overline{B}) = \frac{116430}{244600} \approx 0{,}476$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{100306}{128170} \approx 0{,}783 \qquad P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{27864}{128170} \approx 0{,}217$$

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{97147}{116430} \approx 0{,}834 \qquad P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{19283}{116430} \approx 0{,}166$$

A3 Ausführliche Lösung

d)

(1)	$P(\overline{A}) \approx 0{,}193$	Die zufällig ausgewählte Person stammt mit einer Wahrscheinlichkeit von 19,3% aus den neuen Bundesländern (Ost).
(2)	$P(B) \approx 0{,}524$	Die zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 52,4% weiblich.
(3)	$P_{\overline{A}}(\overline{B}) \approx 0{,}409$	Wenn man weiß, dass die zufällig ausgewählte Person aus den neuen Bundesländern stammt, dann ist diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 40,9% männlich.
(4)	$P_B(A) \approx 0{,}783$	Wenn man weiß, dass die zufällig ausgewählte Person weiblich ist, dann stammt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,3% aus den alten Bundesländern (West).