Lösungen Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung einer Klassenarbeit IV

Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	$\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}=\underline{\underline{0}}$
	b)	$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}=\underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$
	c)	$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=\underline{\underline{\frac{512}{15}}}$
	d)	$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\left[\frac{1}{12}(u)^4\right]_{0}^{3}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$ Substitution: $u(x)=3x-6$

E2	Ergebnis
	$P_{Max}(0\,\vert\,-8)$; $P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\vert\,-\frac{49}{5}\right)$; $P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\vert\,-\frac{49}{5}\right)$ Die Fläche: $A=\lvert-32\rvert=32\text{ FE}$

E3	Ergebnisse	
	a)	Fensterbreite: $b=\sqrt{\frac{16}{3}}\approx\underline{\underline{2{,}309\text{ m}}}$ Fensterhöhe: $h=\underline{\underline{\frac{8}{3}\approx 2{,}\overline{6}\text{ m}}}$ Fensterfläche: $A=h\cdot b=\underline{\underline{\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 6{,}158\text{ m}^2}}$
	b)	Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche. Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}\approx\underline{\underline{4{,}508\text{ m}^2}}$

E4	Ergebnis
	Die Fläche des Dreiecks beträgt etwa 4,333... FE.

E5	Ergebnisse	
	a)	$P_y(0\,\vert\,8)$; $P_{x1}\left(\sqrt{20}\,\vert\,0\right)$; $P_{x2}\left(-\sqrt{20}\,\vert\,0\right)$; $P_{x3}(2\,\vert\,0)$; $P_{x4}(-2\,\vert\,0)$
	b)	$P_{max}(0\,\vert\,8)$; $P_{min1/2}\left(\pm\sqrt{12}\approx\pm3{,}46\,\vert\,-6{,}4\right)$; $P_{w1}(2\,\vert\,0)$; $P_{w2}(-2\,\vert\,0)$
	c)	Graph siehe ausführliche Lösung.
	d)	$\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8\right)dx=\frac{512}{25}\approx 20{,}48$

Ausführliche Lösungen

A1	Ausführliche Lösungen		
	a) $\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx$ $=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}$ $=\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2-\left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+(-3)^2\right)$ $=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2\right)$ $=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{81}{4}+9\right)=\underline{\underline{0}}$	b)	$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx$ $=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}$ $=\frac{16}{4}-\frac{8}{6}+\frac{12}{2}-8-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4\right)$ $=4+6-8-\frac{4}{3}-4-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}$ $=-2-\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{18}{12}=-\frac{63}{12}=\underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
	c) $\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx$ $=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}$ $=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{40}\cdot 4^5-\left(\frac{2}{3}\cdot(-4)^3-\frac{1}{40}\cdot(-4)^5\right)$ $=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left(-\frac{128}{3}+\frac{1024}{40}\right)$ $=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}$ $=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{256}{3}-\frac{256}{5}$ $=\frac{1280}{15}-\frac{768}{15}=\underline{\underline{\frac{512}{15}}}$	d)	$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx$ $u(x)=3x-6$ $\Rightarrow\frac{du}{dx}=3\Rightarrow dx=\frac{1}{3}du$ $ug: u(2)=3\cdot 2-6=0$ $og: u(3)=3\cdot 3-6=3$ $\Rightarrow\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(u)^3\,du=\frac{1}{12}u^4\Big\|_{0}^{3}$ $=\frac{1}{12}\cdot 81=\frac{81}{12}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

A2

Ausführliche Lösung

Extremwerte

$f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$ ist symmetrisch zur y – Achse $\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$f'(x)=5x^3-6x\,;\ f''(x)=15x^2-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3-6x=0$

$\Leftrightarrow x\left(5x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0\,;\ x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_1)=f''(0)=15\cdot 0^2-6=-6<0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_1=0$

$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_2=\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_3=-\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f(x_1)=f(0)=-8 \Rightarrow P_{Max}(0\,|\,-8)$

$f(x_{2/3})=f\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{4}\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4-3\left(\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-8=-\frac{49}{5}$ wegen $f(-x)=f(x)$

$\Rightarrow P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\approx -1{,}1\,\middle|\,-\frac{49}{5}=-9{,}8\right);\ P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\approx 1{,}1\,\middle|\,-\frac{49}{5}=-9{,}8\right)$

A2 Ausführliche Lösung

Nullstellen- und Flächenberechnung

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0 \mid \cdot\frac{4}{5} \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow p=-\frac{12}{5}\,;\,q=-\frac{32}{5}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{32}{5}=\frac{36}{25}+\frac{160}{25}=\frac{196}{25} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} z_1=\frac{6}{5}+\frac{14}{5}=\frac{20}{5}=4 \\ z_2=\frac{6}{5}-\frac{14}{5}=-\frac{8}{5}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

Flächenintegral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx=\left.\frac{x^5}{4}-x^3-8x\right|_{-2}^{2}$$

$$=\frac{2^5}{4}-2^3-8\cdot 2-\left[\frac{(-2)^5}{4}-(-2)^3-8\cdot(-2)\right]=\frac{32}{4}-8-16-\left[-\frac{32}{4}-(-8)+16\right]$$

$$=8-8-16-(-8+8+16)=-16-(16)=-32$$

Die Fläche: $A=\left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx\right|=\left|-32\right|=32\text{ FE}$

Da das Ergebnis der Integration negativ ist, liegt der Graph von f unterhalb der x- Achse.

A2 Ausführliche Lösung

$P_{Max}(0\,|\,-8)$

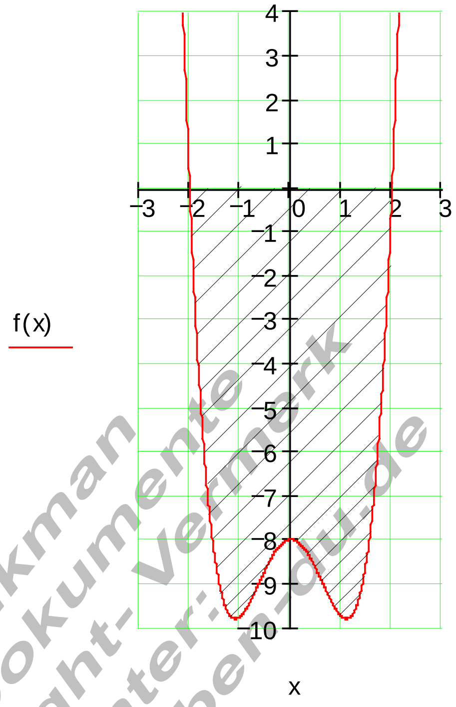
$P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}(-1{,}09\,|\,-9{,}8)$

$P_{Min\_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

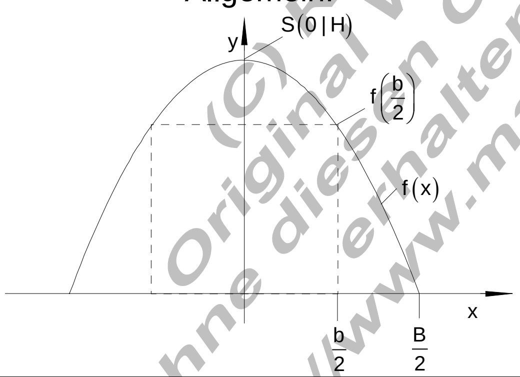
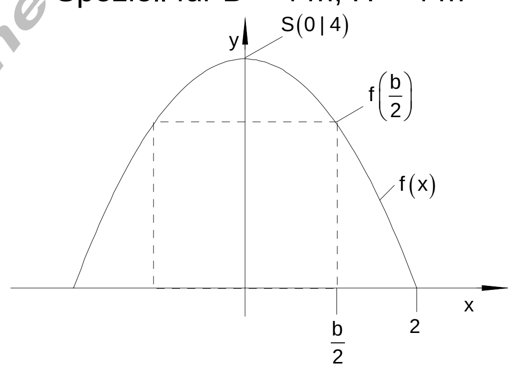
bzw. $P_{Min\_1}(1{,}09\,|\,-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76	



A3 Ausführliche Lösung

Mathematisierung des Problems

Allgemein:	Speziell für B = 4 m, H = 4 m
	

A3 Ausführliche Lösung

a)

Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + 4$ Scheitelpunktform wegen $S(0\,|\,4)$

$$P(2\,|\,0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4 \,|\, :4$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

Parabelgleichung: $f(x) = -x^2 + 4$

Rechteckfläche: $A = b \cdot h$ mit $h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

Das Maximum von $A(b)$ ist zu finden (Extremwert)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

Notwendige Bedingung für Extremwert:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0 \,|\, :-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4 \,|\, :\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \,|\, \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

Nur b_1 ist zu verwerten, da es keine negativen Längen gibt.

Überprüfung auf Extremstelle:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Fensterbreite: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\text{ m}}}$

Fensterhöhe:

$$h = f\left(\frac{b}{2}\right) \text{ mit } \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \text{ und } f(x) = -x^2 + 4$$

$$\text{wird } h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}\text{ m}}}$$

Fensterfläche: $A = h \cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\text{ m}^2}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche.

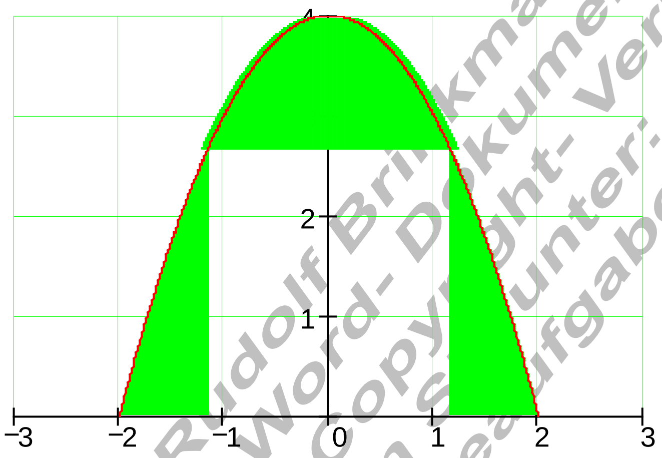
Fläche unter der Parabel:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2+4\cdot 2-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\overline{6}\,m^2$$

Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\,m^2}}$



A4 Ausführliche Lösung

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x \qquad \text{Tangente durch } P(4\,|\,2)\Rightarrow x_0=4$$

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f(x_0)=f(4)=2\,;\,f'(x_0)=f'(4)=-\frac{3}{2}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x-4)+2=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+8}}$$

$$n(x)=\frac{2}{3}(x-4)+2=\underline{\underline{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}}$$

Schnittpunkt der Tangente mit der x – Achse:

$$t(x)=0\Leftrightarrow x_t=\frac{16}{3}$$

Schnittpunkt der Normalen mit der x – Achse:

$$n(x)=0\Leftrightarrow x_n=1$$

Dreieckfläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ mit $g=x_t-x_n=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3}$

und $h=2\Rightarrow A=\frac{\frac{13}{3}\cdot 2}{2}=\underline{\underline{\frac{13}{3}\text{ FE}}}$

A5 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8 \qquad \text{Achsenschnittpunkte}$$

$P_y:\ f(0)=8\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,8)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8=0\,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow x^4-24x^2+80=0 \text{ Substitution } z=x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2-24z+80=0\Rightarrow z_1=20 \text{ bzw. } z_2=4$$

Nach Rücksubstitution

$$x_{1/2}=\pm\sqrt{20}\approx 4{,}47 \text{ bzw. } x_{2/3}=\pm 2$$

$$P_{x1}\left(\sqrt{20}\,|\,0\right);\,P_{x2}\left(-\sqrt{20}\,|\,0\right);\,P_{x3}(2\,|\,0);\,P_{x4}(-2\,|\,0);$$

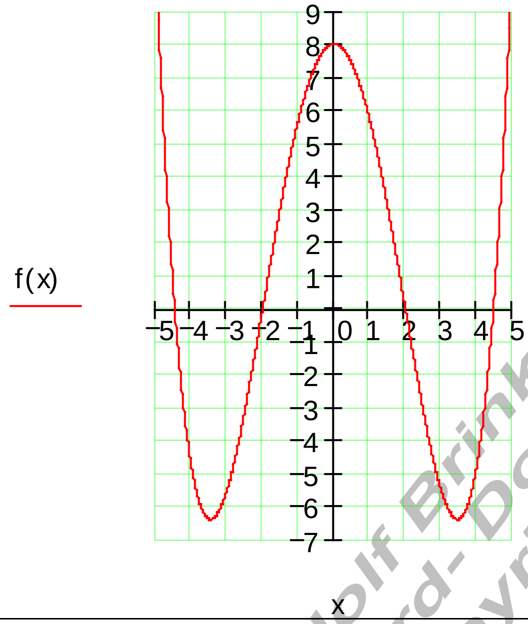
A5	Ausführliche Lösung	
	b)	Extrempunkte und Wendepunkte $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{24}{5}x \Rightarrow f''(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{24}{5} \Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{5}x$ Extrempunkte: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x^3-\frac{24}{5}x=0 \Leftrightarrow x^3-12x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-12\right)=0$ $\Rightarrow x_1=0$ bzw. $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}\approx\pm3,46$ $f''(x_1)=f''(0)=-\frac{24}{5}<0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_1=0$ $f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{48}{5}>0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_{1/2}=\pm\sqrt{12}$ Die y – Koordinaten $f(x_1)=f(0)=8 \Rightarrow P_{max}(0\,\|\,8)$ $f(x_{2/3})=f\left(\pm\sqrt{12}\right)=-6,4 \Rightarrow P_{min1/2}\left(\pm\sqrt{12}\approx\pm3,46\,\|\,-6,4\right)$ Wendepunkte: $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6}{5}x^2-\frac{24}{5}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm2$ $f'''(x_1)=f'''(2)=\frac{24}{5}\neq0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1=2$ $f'''(x_2)=f'''(-2)=-\frac{24}{5}\neq0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2=-2$ Die y – Koordinaten $f(x_{1/2})=f(\pm2)=0 \Rightarrow P_{w1}(2\,\|\,0);\ P_{w2}(-2\,\|\,0)$

A5 Ausführliche Lösung

c) Wertetabelle:

x	0	1	2	3,46	4	4,87
$f(x)$	8	5,7	0	−6,4	−4,8	0

Da die Funktion achsensymmetrisch ist gilt $f(-x) = f(x)$



A5 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8\right)dx = \left[\frac{1}{50}x^5 - \frac{4}{5}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{50}\cdot 2^5 - \frac{4}{5}\cdot 2^3 + 8\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{50}\cdot(-2)^5 - \frac{4}{5}\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2)\right)\right] = 20,48$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 20,48$$