Lösungen Parameteraufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$P_{k_y}\left(0\,|\,k\right)$ $\qquad$ $P_{k_x}\left(k\,|\,0\right)$
	b)	Hochpunkt: $\qquad P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$
	c)	Wendepunkt: $\qquad P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$
	d)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k\left(x\right)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty} f_k\left(x\right)=-\infty$
	e)	Fläche: $\qquad A_k=\left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-2k-4\right|$
	f)	Siehe ausführliche Lösung
	g)	Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Hochpunkte: $\quad f_{okh}\left(x\right)=2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Wendepunkte: $\quad f_{okw}\left(x\right)=4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
	h)	Die Fläche für k = 4 beträgt 17,556 FE

E2	Ergebnisse	
	a)	$P_{k_y}\left(0\,|\,-k\right)$ $\qquad$ $P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$
	b)	$f_k'\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $f_k''\left(x\right)=\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $f_k'''\left(x\right)=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
	c)	An der Stelle $x_1=-2+\sqrt{4+k}$ liegt ein relatives Minimum, falls $k>-4$ An der Stelle $x_2=-2-\sqrt{4+k}$ liegt ein relatives Maximum, falls $k>-4$
	d)	$x_1=-4+\sqrt{8+k}$ ist eine Wendestelle, falls $k>-8$ $x_2=-4-\sqrt{8+k}$ ist eine Wendestelle, falls $k>-8$
	e)	Für die physikalische Fläche gilt: $A_k=\left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k\left(x\right)dx\right|=\left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$
	f)	Siehe ausführliche Lösung.
	g)	Fläche A_4 = 11,772 FE.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	Achsenschnittpunkte: Schnittpunkt mit der y- Achse: $f_k(x) = (k - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $y_s = f_k(0) = (k - 0) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid k)}}$ Schnittpunkt mit der x- Achse (Nullstelle): $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{k - x}_{0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \mid$ Satz vom Nullprodukt anwenden $k - x = 0 \mid +x \Leftrightarrow k = x \Leftrightarrow x = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k \mid 0)}}$

A1	Ausführliche Lösung

b) Extrempunkte:

$$f_k(x) = (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = k - x \Rightarrow u' = -1 \text{ und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -1\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \text{ und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{4} \text{ und } v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = -\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}k - \frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$ | Satz vom Nullprodukt anwenden

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k - 2$

$\Leftrightarrow x = k - 2$ ist eine mögliche Extremstelle

Überprüfung durch die 2. Ableitung: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''(k-2) = \left[-\frac{1}{4}(k-2) + \frac{1}{4}k - 1\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)} = -\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1} < 0$$

Bei $x = x_E = k - 2$ befindet sich ein relatives Maximum (Hochpunkt)

Extremwert:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = \left[k - (k-2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt: $\underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k - 2 \mid 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k - 1}\right)}}$

A1	Ausführliche Lösung
c)	Wendepunkt:
	$f_k''(x)=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ $\qquad f_k'''(x)=\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkt:
	$f_k''(x)=0 \wedge f_k'''(x)\neq 0$
	$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$ | Satz vom Nullprodukt anwenden
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1=0 \Leftrightarrow x=k-4$
	$\Leftrightarrow x=k-4$ ist eine mögliche Wendestelle
	Überprüfung durch die 3. Ableitung: $f_k'''(x)\neq 0$
	$f_k'''(x)=f_k'''(k-4)=\left[-\frac{1}{8}\cdot(k-4)+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)}=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\neq 0$
	Bei $x=x_w=k-4$ befindet sich ein Wendepunkt
	$y_{k_w}=f_k(x_w)=f_k(k-4)=\left[k-(k-4)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)}=4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}$
	$\Rightarrow$ Wendepunkt: $\quad \underline{\underline{P_{k_w}\left(k-4 \mid 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$

A1	Ausführliche Lösung
d)	Funktionswerte für die Grenzen des Definitionsbereichs:
	Zu bestimmen ist: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0$
	Für $x\to-\infty$ ist die x – Achse Asymptote von $f_k(x)$
	$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=-\infty$
	Für $x\to\infty$ wachsen die Funktionswerte von $f_k(x)$ im negativen über alle Grenzen

A1 Ausführliche Lösung

e) Die Fläche A_k zwischen den Achsenschnittpunkten:

Nullstelle: $x_1 = k \Rightarrow$ Flächenintegral $A_k = \left|\int\limits_0^k f_k(x)\,dx\right|$

$$\int\limits_0^k f_k(x)\,dx = \int\limits_0^k (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

Lösung durch partielle Integration zunächst allgemein

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'(x)}\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x) = k-x \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v(x) = \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int (-1)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\int f_k(x)\,dx = (k-x)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \left(-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) + C = 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int\limits_0^k f_k(x)\,dx = \left[2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left(2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4$$

Damit wird die Fläche zu: $\underline{\underline{A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|}}$

A1 Ausführliche Lösung

f) Wertetabelle und Kurvenschaar (Graphen)
Achsenschnittpunkte, Tiefpunkt und Wendepunkt sind zusätzlich zur Wertetabelle zu berechnen.

$P_{k_y}(0\,|\,k)$; $P_{k_x}(k\,|\,0)$; $P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$; $P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$

$k = 1$:

$P_{1_y}(0\,|\,1)$; $P_{1_x}(1\,|\,0)$; $P_{1_{Min}}\left(-1\,|\,2\cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}21\right)$; $P_{1_w}\left(-3\,|\,4\cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}89\right)$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	−2,72	−8,96	−22,17	−48,73

A1 f) $k = 2$:

$P_{2_y}(0\,|\,2)$; $P_{2_x}(2\,|\,0)$; $P_{2_{Min}}\left(0\,|\,2\cdot e^0 = 2\right)$; $P_{2_w}\left(-2\,|\,4\cdot e^{-1} \approx 1{,}47\right)$

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	–4,48	–14,78	–36,55

A1 f) $k = 3$:

$P_{3_y}(0\,|\,3)$; $P_{3_x}(3\,|\,0)$; $P_{3_{Min}}\left(1\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}3\right)$; $P_{3_w}\left(-1\,|\,4\cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43\right)$

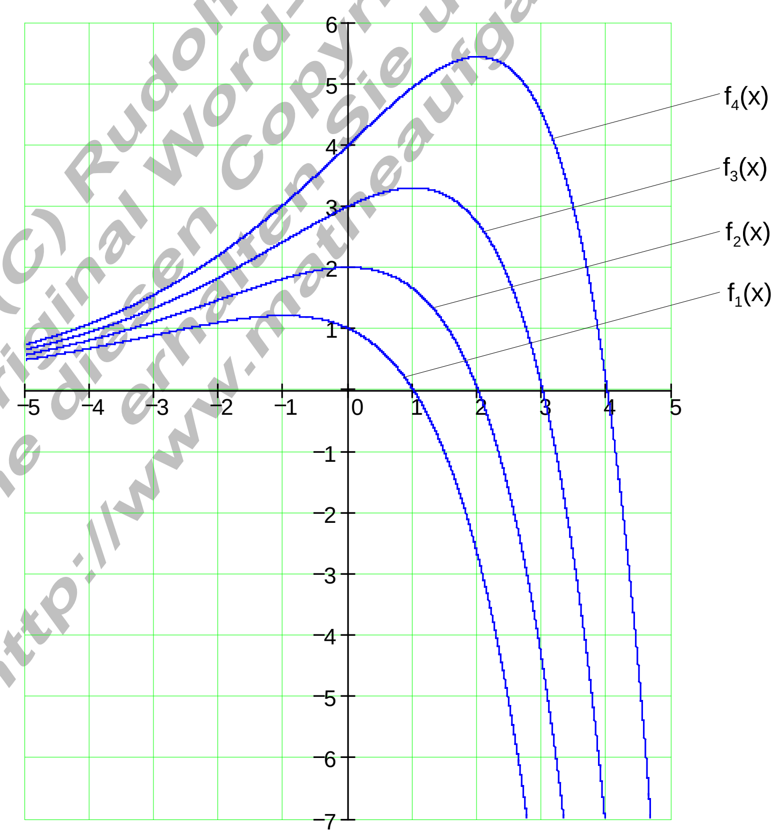
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	–7,39	–24,36

A1 f) $k = 4$:

$P_{4_y}(0\,|\,4)$; $P_{4_x}(4\,|\,0)$; $P_{4_{Min}}\left(2\,|\,2\cdot e^1 \approx 5{,}44\right)$; $P_{4_w}\left(0\,|\,4\cdot e^0 = 4\right)$

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	–12,18

A1 f)



A1 Ausführliche Lösung

g) Berechnung der Ortskurven:

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_{x} \mid \underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-2 \quad (1) \quad y = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1} \quad (2)$$

(1) nach k auflösen:

$x = k-2 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+2$

das Ergebnis in (2) einsetzen:

$$y = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Damit wird die Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Hochpunkte:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

$$P_{k_w}\left(\underbrace{k-4}_{x} \mid \underbrace{4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-4 \quad (1) \quad y = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2} \quad (2)$$

(1) nach k auflösen:

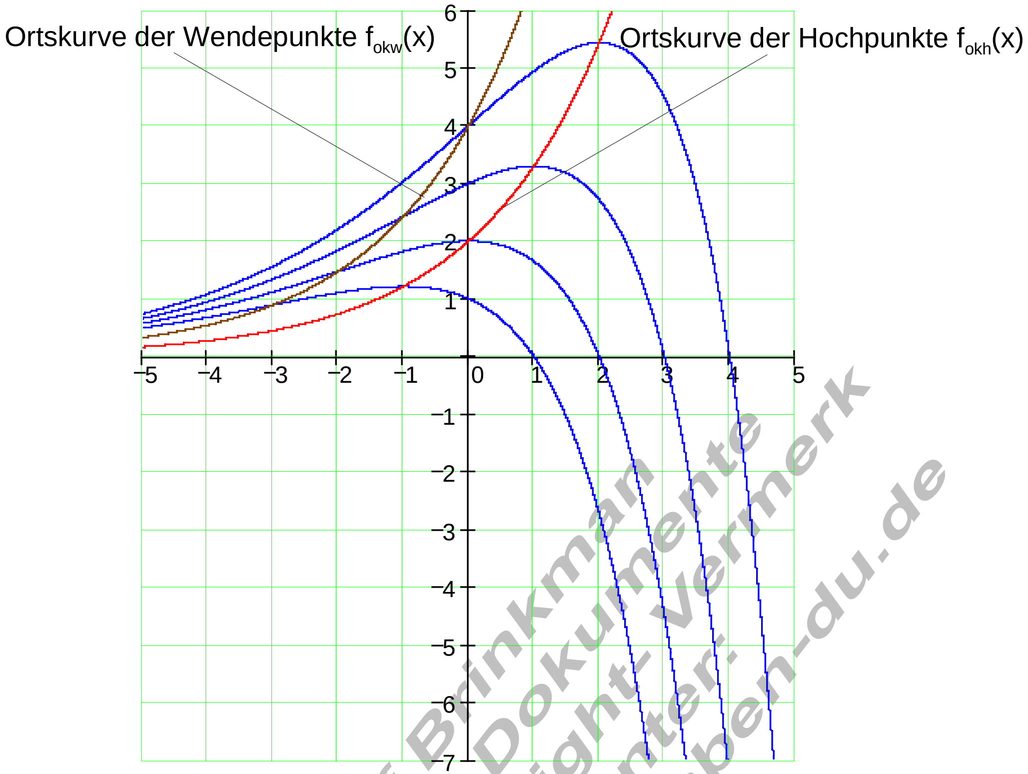
$x = k-4 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+4$

das Ergebnis in (2) einsetzen:

$$y = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+4)-2} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+2-2} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

Damit wird die Funktionsgleichung der Ortskurve für alle Wendepunkte:

$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

A1	g)	

A1	Ausführliche Lösung
h)	Fläche für k = 4: $A_k = \left\| 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k} - 2k - 4 \right\|$ Ergebnis aus e) $A_4 = \left\| 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4 \right\| = \left\| 4 \cdot e^2 - 8 - 4 \right\| = \left\| 4 \cdot e^2 - 12 \right\| \approx 17{,}556$ Die Fläche für k = 4 beträgt $\underline{\underline{17{,}556 \text{ FE}}}$.

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	Achsenschnittpunkte: Schnittpunkt mit der y- Achse: $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $y_s = f_k(0) = (0^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid -k)}}$ Schnittpunkte mit der x- Achse (Nullstellen): $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{x^2 - k}_{=0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\neq 0} = 0 \mid \text{Satz vom Nullprodukt anwenden}$ $x^2 - k = 0 \mid +k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = k \mid \sqrt{} \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| = \sqrt{k}$ $\Leftrightarrow \quad x_{k_{x1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_{k_{x1/2}}(\pm\sqrt{k} \mid 0)}}$ Nullstellen gibt es nur für $k \geq 0$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	Die Ableitungen: $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $f_k'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x \text{ und } v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + (x^2 - k) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$

A2	b)	
		$f_k''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $f_k''(x) = (x + 2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$

A2	b)	
		$f_k'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2$ $\text{und } v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $f_k'''(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ $= \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$

A2 Ausführliche Lösung

c) Extremstellen:

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k}_{0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0\,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x-k=0$$

$$p=4;\quad q=-k \quad \Rightarrow \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+k$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{D}=\sqrt{4+k} \text{ existiert für } k\geq -4$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_1=-2+\sqrt{4+k}\\ x_2=-2-\sqrt{4+k}\end{array}\right. \quad \text{für } k\geq -4$$

Für $k\geq -4$ sind x_1 und x_2 Stellen mit waagerechter Tangente.
Für $k<-4$ gibt es keine waagerechten Tangenten.

Art des Extremums: $f_k''(x_{1/2})\neq 0$

$$f_k''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2+2\cdot x_{1/2}-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{>0}$$

Falls $(...)>0 \Rightarrow$ rel. Minimum bei $x_{1/2}$

Falls $(...)<0 \Rightarrow$ rel. Maximum bei $x_{1/2}$

Zwischenrechnung: $x_1^2=\left(-2+\sqrt{4+k}\right)^2=8-4\cdot\sqrt{4+k}+k$

$$x_2^2=\left(-2-\sqrt{4+k}\right)^2=8+4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\cdot x_1-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2+\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]$$

$$=\sqrt{4+k}>0$$

An der Stelle $x_1=-2+\sqrt{4+k}$ liegt ein relatives Minimum, falls $k>-4$

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\cdot x_2-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8+4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2-\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]$$

$$=-\sqrt{4+k}<0$$

An der Stelle $x_2=-2-\sqrt{4+k}$ liegt ein relatives Maximum, falls $k>-4$

Für den Fall $k=-4$ ist $\sqrt{4+k}=0$ also $f_k''(x_{1/2})=0$

in diesem Fall gibt es an den Stellen $x_{1/2}$ zwar waagerechte Tangenten aber keinene Extremwerte.

A2 Ausführliche Lösung

d) Wendestellen:

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2}_{=0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2=0\,|\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+8x-k+8=0$$

$$p=8;\quad q=-k+8 \quad \Rightarrow \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-(-k+8)=16+k-8=8+k$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{8+k} \\ x_1=-4-\sqrt{8+k}\end{array}\right. \quad \text{für } k\geq -8$$

Für $k\geq -8$ sind x_1 und x_2 mögliche Wendestellen.

Für $k<-8$ gibt es keine Wendestellen.

Überprüfung auf Wendestelle: $f_k'''(x_{1/2})\neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2+\frac{3}{2}x_{1/2}-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

Falls $(...)\neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x_{1/2}$

Zwischenrechnung: $x_1^2=\left(-4+\sqrt{8+k}\right)^2=24-8\cdot\sqrt{4+k}+k$

$$x_2^2=\left(-4-\sqrt{8+k}\right)^2=24+8\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2+\frac{3}{2}x_1-\frac{1}{8}k+3=\left[\frac{1}{8}\left(24-8\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+\frac{3}{2}\left(-4+\sqrt{8+k}\right)-\frac{1}{8}k+3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{8+k}\neq 0$$

$x_1=-4+\sqrt{8+k}$ ist eine Wendestelle, falls $k>-8$

$$\frac{1}{8}x_2^2+\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{8}k+3=\left[\frac{1}{8}\left(24+8\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+\frac{3}{2}\left(-4-\sqrt{8+k}\right)-\frac{1}{8}k+3\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{8+k}\neq 0$$

$x_2=-4-\sqrt{8+k}$ ist eine Wendestelle, falls $k>-8$

A2 Ausführliche Lösung

e) Allgemeine Flächenberechnung:

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\mid 0\right)$ Nullstellen gibt es nur für $k \geq 0$

Zu berechnen ist das Integral:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{I}} - k\cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{II}} = \mathrm{I} - k\cdot \mathrm{II}$$

Die allgemeine Lösung von I wurde vorgegeben:

$$\int x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

Lösung zu II:

$$\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot\int e^u\,du = 2\cdot e^u = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

Zusammenfassung:

$$\int f_k(x)\,dx = \mathrm{I} - k\cdot\mathrm{II} = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$= \left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

Einsetzen der Grenzen:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \left[\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$= \left(2k-8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(2k+8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

$$= \left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

Für die physikalische Fläche gilt:

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$$

A2	Ausführliche Lösung	
	f)	$k=-4$ $P_{k_y}(0\mid -k)\Rightarrow P_{-4_y}(0\mid 4)$ keine Nullstellen, da $k<0$ keine Extremwerte, da für $k=-4$ die Bedingung $k>-4$ nicht erfüllt ist. $x_{k_{w1}}=-4+\sqrt{8+k}\Rightarrow x_{-4_{w1}}=-4+\sqrt{8-4}=-4+\sqrt{4}=-2\Rightarrow f_{-4}\left(x_{-2_{w1}}\right)\approx 2,94$ $x_{-4_{w2}}=-4-\sqrt{8-4}=-4-\sqrt{4}=-6\Rightarrow f_{-4}\left(x_{-4_{w2}}\right)\approx 1,99$

A2	f)	$k=-2$ $P_{k_y}(0\mid -k)\Rightarrow P_{-2_y}(0\mid 2)$ keine Nullstellen, da $k<0$ $x_{k_{Min}}=-2+\sqrt{4+k}\Rightarrow x_{-2_{Min}}=-2+\sqrt{4-2}=-2+\sqrt{2}\approx -0,59\Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Min}}\right)\approx 1,75$ $x_{-2_{Max}}=-2-\sqrt{4-2}=-2-\sqrt{2}\approx -3,41\Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Max}}\right)\approx 2,48$ $x_{k_{w1}}=-4+\sqrt{8+k}\Rightarrow x_{-2_{w1}}=-4+\sqrt{8-2}=-4+\sqrt{6}\approx -1,55\Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w1}}\right)\approx 2,03$ $x_{-4_{w2}}=-4-\sqrt{8-2}=-4-\sqrt{6}\approx -6,45\Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w2}}\right)\approx 1,73$

A2	f)	$k=0$ $P_{k_y}(0\mid -k)\Rightarrow P_{0_y}(0\mid 0)$ $P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\mid 0\right)\Rightarrow P_{0_{x1/2}}(0\mid 0)$ doppelte Nullstelle $x_{k_{Min}}=-2+\sqrt{4+k}\Rightarrow x_{0_{Min}}=-2+\sqrt{4+0}=-2+\sqrt{4}=0\Rightarrow f_0\left(x_{0_{Min}}\right)=0$ $x_{0_{Max}}=-2-\sqrt{4+0}=-2-\sqrt{4}=-4\Rightarrow f_0\left(x_{0_{Max}}\right)\approx 2,17$ $x_{k_{w1}}=-4+\sqrt{8+k}\Rightarrow x_{0_{w1}}=-4+\sqrt{8+0}=-4+\sqrt{8}\approx -1,17\Rightarrow f_0\left(x_{0_{w1}}\right)\approx 0,76$ $x_{0_{w2}}=-4-\sqrt{8+0}=-4-\sqrt{8}\approx -6,83\Rightarrow f_0\left(x_{0_{w2}}\right)\approx 1,53$

A2	f)	$k=2$ $P_{k_y}(0\mid -k)\Rightarrow P_{2_y}(0\mid -2)$ $P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\mid 0\right)\Rightarrow P_{2_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{2}\approx \pm 1,41\mid 0\right)$ $x_{k_{Min}}=-2+\sqrt{4+k}\Rightarrow x_{2_{Min}}=-2+\sqrt{4+2}=-2+\sqrt{6}\approx 0,45\Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right)\approx -2,25$ $x_{2_{Max}}=-2-\sqrt{4+2}=-2-\sqrt{6}\approx -4,45\Rightarrow f_2\left(x_{2_{Max}}\right)\approx 1,92$ $x_{k_{w1}}=-4+\sqrt{8+k}\Rightarrow x_{2_{w1}}=-4+\sqrt{8+2}=-4+\sqrt{10}\approx -0,84\Rightarrow f_2\left(x_{2_{w1}}\right)\approx -0,85$ $x_{2_{w2}}=-4-\sqrt{8+2}=-4-\sqrt{10}\approx -7,16\Rightarrow f_2\left(x_{2_{w2}}\right)\approx 1,37$

A2 f)

$k = 4$

$P_{k_y}(0 \mid -k) \Rightarrow P_{4_y}(0 \mid -4)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{4} = \pm 2 \mid 0\right)$

$x_{k_{Min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2 + \sqrt{4+4} = -2 + \sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) \approx -5,01$

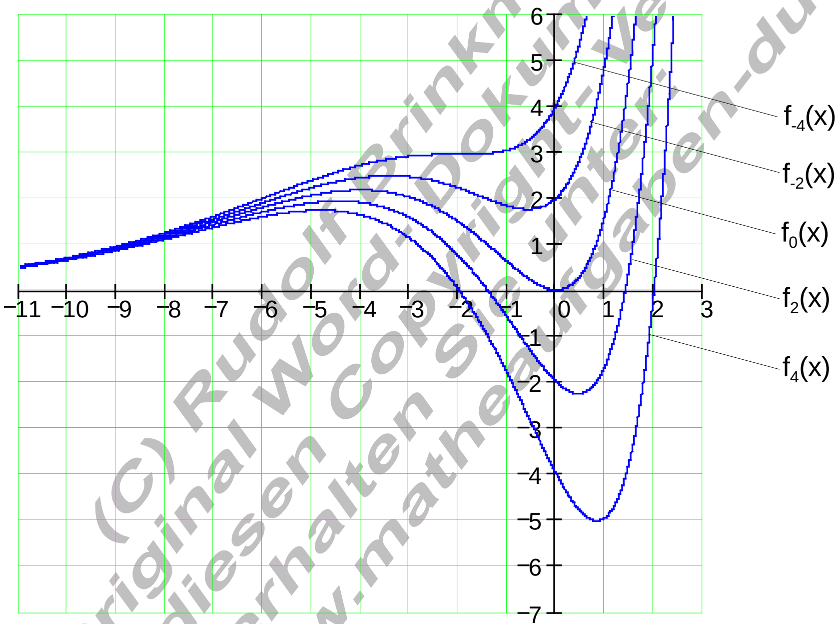
$x_{4_{Max}} = -2 - \sqrt{4+4} = -2 - \sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Max}}\right) \approx 1,73$

$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4 + \sqrt{8+4} = -4 + \sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w1}}\right) \approx -2,84$

$x_{4_{w2}} = -4 - \sqrt{8+4} = -4 - \sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w2}}\right) \approx 1,24$

A2 f)

$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ für $k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$



A2 Ausführliche Lösung

g) Für die physikalische Fläche gilt:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{k} + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k} + 16\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k}} \right|$$

Speziell für $k = 4$ gilt:

$$A_4 = \left| \int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x)\,dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{4} + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4} + 16\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}} \right|$$

$$= \left| (-8 \cdot 2 + 16) \cdot e - (8 \cdot 2 + 16) \cdot e^{-1} \right| = \left| -32 \cdot e^{-1} \right| \approx \left| -11,772 \right| = \underline{\underline{11,772\,FE}}$$

A2	g)