

Lösungen Anwendungsaufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung II**Ergebnisse**

E1	Ergebnisse
	a) Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.
	b) Die Funktionsgleichung der Dosierung lautet: $f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$
	c) Die Abnahme der Dosierung ist nach $x = 8$ Stunden am stärksten. Das ist die Wendestelle.
d) $M = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$ In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.	

E2	Ergebnisse
	a) Die Funktionsgleichung der Stammfunktion $F(x)$ lautet: $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$
b) Der Inhalt der gekennzeichneten Fläche beträgt etwa $A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477$ FE	

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung a) Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.
A1	Ausführliche Lösung b) Ansatz: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Anfangsdosierung: $n_0 = 1 \text{ mg/h} \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Maximale Dosierung nach $x = 4$ Stunden bedeutet: $f(x)$ hat bei $x = 4$ eine waagerechte Tangente, also $f'(4) = 0$ $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = a \cdot x$ und $v = e^{k \cdot x}$ sowie $u' = a$ und $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ $f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x} (1 + k \cdot x)$ $f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k} (1 + 4 \cdot k) = 0$ $\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ Extremwert nach $x = 4$ Stunden: $f(4) = 5$ $f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$ $\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$ Funktionsgleichung der Dosierung: $f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>c) Die Änderungsrate der Dosierung wird durch die erste Ableitung beschrieben. Ihr Maximum ist an der Wendestelle.</p> $f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ <p>Erste Ableitung:</p> $f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$ <p>sowie $u' = e$ und $v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$</p> $f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \left(1 - \frac{1}{4}x\right)$ <p>Zweite Ableitung:</p> $f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$ <p>sowie $u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v' = -\frac{1}{4}$</p> $f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}x\right)$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8 \text{ Bedingung für Wendestelle}$ <p>Dritte Ableitung:</p> $f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$ <p>sowie $u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v' = -\frac{1}{4}$</p> $f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(2 - \frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(3 - \frac{1}{4}x\right)$ $f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot \left(3 - \frac{1}{4} \cdot 8\right) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$ <p>$\Rightarrow x_w = 8$ ist Wendestelle von $f(x)$</p> <p>Die Abnahme der Dosierung ist nach $x = 8$ Stunden am stärksten.</p>
----	--

A1 Ausführliche Lösung

- d) Die Menge des verabreichten Medikamentes entspricht der Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, denn $\text{mg/h} \cdot \text{h} = \text{mg}$. Dabei wird eine Infusionszeit von 24 Stunden zugrunde gelegt.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow \text{Menge} = M = \int_0^{24} f(x) dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx$$

$$\text{Aufteilung des Integrals in I} = \int_0^{24} 1 dx \text{ und in II} = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

so dass gilt: $M = I + e \cdot \text{II}$

$$I = \int_0^{24} 1 dx = [x]_0^{24} = 24$$

$$\text{II} = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx \text{ Lösung durch partielle integration mit } \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

Zwischenrechnung:

$$\int e^{-\frac{1}{4}x} dx \text{ Lösung durch Substitution } u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4 du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x} dx = -4 \int e^u du = -4e^u = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4 \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x} (x + 4)$$

$$\Rightarrow \text{II} = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x} (x + 4) \right]_0^{24} = -4e^{-6} (24 + 4) - [-4 \cdot 4] = -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot \text{II} = 24 + e(-112e^{-6} + 16) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$$

In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

A2	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = -2x^2 + x + 3$ $I(x) = \int f(x) dx = \int (-2x^2 + x + 3) dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ $P(-2 0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$ $\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$ $F(x) = I(x) + C \Rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
<http://www.brinkmann-du.de>

A2	Ausführliche Lösung
	<p>b) Für die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von $F(x)$ zu bestimmen.</p> $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3} \quad x_1 = -2 \text{ ist bekannt}$ $x_1 = -2 \quad \begin{array}{cccc} -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ \downarrow & & & \\ 4/3 & -22/6 & & 4/3 \\ -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$ $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \quad : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$ $p = -\frac{11}{4}; q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$ $x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2,319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0,431 \end{array} \right.$ $A = A_1 + A_2 = \left \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right + \left \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right $ <p>mit $x_1 = -2; x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}}; x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$</p> $A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big _{x_1}^{x_2}$ $= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4,995$ $A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big _{x_2}^{x_3}$ $= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522$ $A \approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}$