Lösungen zur Differenzial- und Integralrechnung I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$
	b)	$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}+5\cdot e^{x}-1$

E2	Ergebnisse	
	a)	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)\approx 0{,}307$
	b)	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)\approx 0{,}561$

E3	Ergebnisse	
	a)	$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$
	b)	$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^{2}-3x}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^{2}-3e^{x}\right)\Rightarrow\int f(x)dx=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^{3}-3e^{x}\right]+C$
	b)	$f(x)=x^{3}-2x^{2}+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+2x^{2}+3\cdot\ln\lvert x\rvert+C$

E5	Ergebnisse	
	a)	$f(x)=(x+a)^{2}-e^{2x-3}\Rightarrow f'(x)=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$
	b)	$f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^{2}\Rightarrow f'(x)=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

E6	Ergebnisse	
	a)	$\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{2}-2\approx 12{,}778$
	b)	$\int_{1}^{2}e^{4-2x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2}-\frac{1}{2}\approx 3{,}195$

E7 Ergebnisse

a) Wertetabelle für $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

b) Tiefpunkt: $T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)$

c) Die gekennzeichnete Fläche beträgt 1 FE

E8 Ergebnis

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}$; $t(x) = 12x + 48$

E9 Ergebnis

$P_{Max}(0 \mid -8)$; $P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$; $P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$

Die Fläche: $A = |-32| = 32$ FE

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösungen

a)

$$\underbrace{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}_{\text{1. bin. Formel}}=e^{2x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+e^{-2x}$$
$$=\underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

b)

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}-\underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}}_{1}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{2x}-1+5\cdot e^{x}$$
$$=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

A2 Ausführliche Lösungen

a)

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\mid -6$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x}=-6\mid\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow e^{2-2x}=4\mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-2x}\right)=\ln(4)$$
$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)$$

wegen $\ln(4)=\ln\left(2^{2}\right)=2\cdot\ln(2)$ gilt:

$$\Leftrightarrow 2-2x=2\cdot\ln(2)\mid -2$$
$$\Leftrightarrow -2x=2\cdot\ln(2)-2\mid :(-2)$$
$$\Leftrightarrow x=-\ln(2)+1=\underline{\underline{1-\ln(2)\approx 0{,}307}}$$

b)

$$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\mid +\frac{e}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{e}{2}\mid\cdot 4$$
$$\Leftrightarrow e^{4x}=4+2e\mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}\right)=\ln(4+2e)$$
$$\Leftrightarrow 4x=\ln(4+2e)\mid :4$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln(4+2e)}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{\frac{1}{4}\ln(4+2e)\approx 0{,}561}}$$

A3 Ausführliche Lösungen

a)

$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$$
$$\Rightarrow f'(x)=-4\cdot e^{-4x}-4\cdot e^{4x}$$
$$=\underline{\underline{-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)}}$$

b)

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}$$
$$\Rightarrow f'(x)=(-10x-3)\cdot\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}$$
$$=\underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^{2}-3x}}}$$

A4 Ausführliche Lösungen

a)

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$$
$$\Rightarrow F(x)=\int\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)dx$$
$$=\frac{1}{16}\int\left(x^2-3e^x\right)dx$$
$$=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3-3e^x\right]+C$$
$$F'(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$$

b)

$$f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$$
$$\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+3\cdot\ln|x|+C$$

Bemerkung: $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

$$f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$
$$F'(x)=x^3-2x^2+4x+3\cdot\frac{1}{x}$$

A5 Ausführliche Lösungen

a)

$$f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$$
$$\Rightarrow f'(x)=2\cdot(x+a)\cdot 1-2\cdot e^{2x-3}$$
$$=2x+2a-2\cdot e^{2x-3}$$
$$=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$$

b)

$f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$ mit Kettenregel

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{2\cdot\left(1-e^{ax}\right)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{a\cdot\left(-e^{ax}\right)}_{\text{innere Abl.}}$$
$$=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$$

A6 Ausführliche Lösungen

a)

$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ Substitution: $u(x)=\frac{1}{2}x$

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du$$

$ug:u(0)=0\,;\,og:u(4)=2$

$$2\cdot\int_0^2 e^u\,du=2\cdot e^u\Big|_0^2=2\cdot e^2-2\cdot e^0$$
$$=2\cdot e^2-2\approx 12{,}778$$

b)

$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ Substitution: $u(x)=4-2x$

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=-2\Rightarrow dx=-\frac{1}{2}du$$

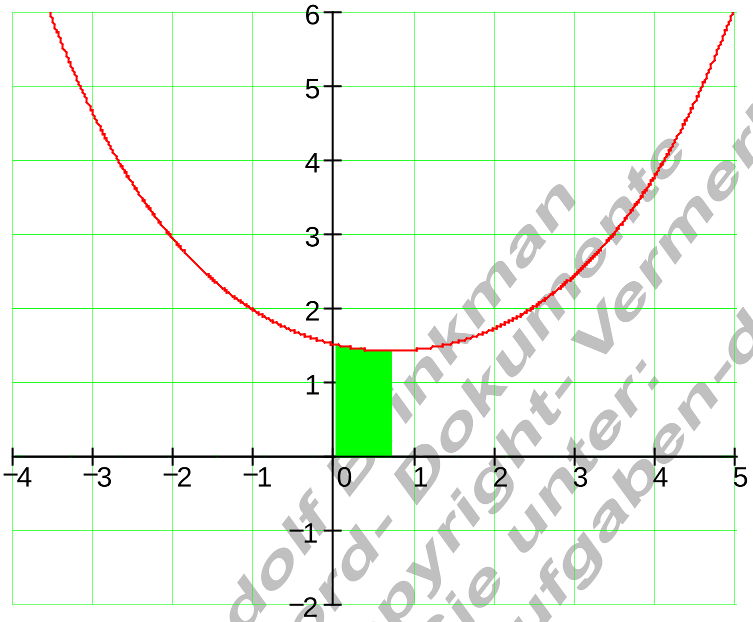
$ug:u(1)=2\,;\,og:u(2)=0$

$$-\frac{1}{2}\cdot\int_2^0 e^u\,du=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^u\,du$$
$$=\frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2}\cdot e^0$$
$$=\frac{1}{2}\cdot e^2-\frac{1}{2}\approx 3{,}95$$

A7 Ausführliche Lösung

a) Wertetabelle für $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



A7	Ausführliche Lösung	
	b)	Berechnung des relativen Minimums.
		$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$
		$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$
		$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot 4$
		$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
		$\Leftrightarrow e^{x} = 2 \mid \ln(\;)$
		$\Leftrightarrow x = \ln(2)$ Extremstelle
		Extremwert: $f(x_e) = f(\ln(2)) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$
		$= 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$
		$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
		Tiefpunkt: $\underline{\underline{T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)}}$

A7	Ausführliche Lösung	
	c)	Flächenberechnung:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx=\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx}_{I}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx}_{II}$$

$$I:\quad \int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=-\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\Rightarrow dx=-2du$$

$$u(0)=0\quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u\,du=2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^u\,du=2\left[e^u\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0}=2\left[e^0-e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$II:\quad \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du$$

$$u(0)=0\quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du=\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du=\left[e^u\right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}=e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^0$$

$$I+II:\quad 2e^0-2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^0=1-2\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{1}}$$

Die gekennzeichnete Fläche beträgt $\underline{\underline{1\ \text{FE}}}$

A8 **Ausführliche Lösung**

Problemanalyse:

Ansatz für ganzrationale Funktionen 3. Grades: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

I : Tiefpunkt in $T(2\,|\,0)$ bedeutet:

1. $x_1 = 2$ ist Nullstelle von $f(x)$, also $f(x_1) = f(2) = 0$
2. $x_T = 2$ ist Extrempunkt von $f(x)$, also $f'(x_T) = f'(2) = 0$

II : $P(-4\,|\,0)$ ist Nullstelle von $f(x)$, also $f(-4) = 0$

III : Die Tangente an $P(-4\,|\,0)$ schneidet die y – Achse in $a_{0T} = 48$,
also $P_{yT}(0\,|\,48)$ und $t(0) = 48$

Aufstellen der Koeffizientengleichungen:

I1. $\Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 0$
$\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$ Gleichung I

I2. $\Rightarrow f'(2) = 0$ mit $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_0 = 0$
$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_0 = 0$
$\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$ Gleichung II

II $\Rightarrow f(-4) = 0 \Leftrightarrow a_3 \cdot (-4)^3 + a_2 \cdot (-4)^2 + a_1 \cdot (-4) + a_0 = 0$
$\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0$ Gleichung III

III Tangentengleichung: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
mit $x_0 = -4$ gilt $f(x_0) = f(-4) = 0$ da $x_0 = -4$ Nullstelle von $f(x)$ ist.
$f'(x_0) = f'(-4) = 3a_3 \cdot (-4)^2 + 2a_2 \cdot (-4) + a_0$
$= 48a_3 - 8a_2 + a_1$
also $t(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x + 4)$
$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1) \cdot 4 = 48$
$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48$ Gleichung IV

A8 Ausführliche Lösung

Damit sind nun alle nötigen Koeffizientengleichungen bekannt:

I $\quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$

II $\quad 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$

III $\quad -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0$

IV $\quad 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48$

Lösung des Gleichungssystems durch Gauß - Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	–4	16	–64	0	III – I
0	4	–32	192	48	|: 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	–6	12	–72	0	III + 6 · II
0	1	–8	48	12	IV – II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	–12	36	12	

$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$

$-12a_2 + 36a_3 = 12$

$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$

$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$

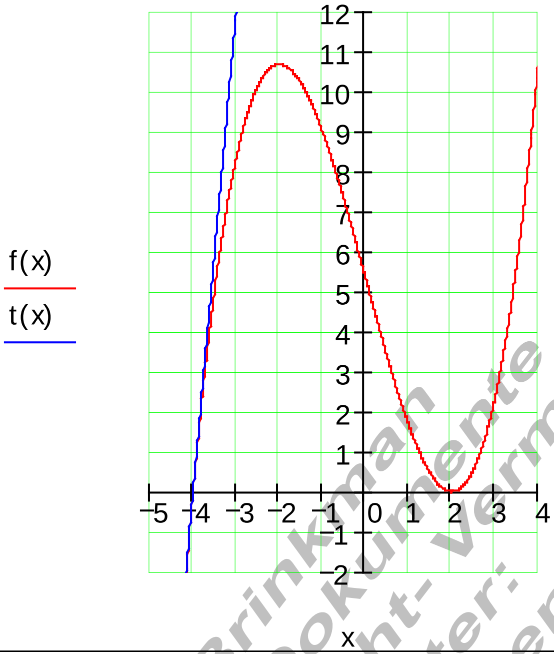
Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}}}$$

Tangentengleichung:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$

A8 Ausführliche Lösung



A9 Ausführliche Lösung

1. Extremwerte

$f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$ ist symmetrisch zur y – Achse $\Rightarrow f(-x)=f(x)$

$f'(x)=5x^3-6x\,;\; f''(x)=15x^2-6$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3-6x=0$

$\Leftrightarrow x\left(5x^2-6\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0\,;\; x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_1)=f''(0)=15\cdot 0^2-6=-6<0 \Rightarrow$ rel Max bei $x_1=0$

$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_2=\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_3=-\sqrt{\frac{6}{5}}$

$f(x_1)=f(0)=-8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0\,|\,-8)}}$

$f(x_2)=f(x_3)=f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-8=-\frac{49}{5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right);\; P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)}}$

A9 Ausführliche Lösung

2. Flächenberechnung

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$ Substitution mit $x^2=z$

$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0 \Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0 \Rightarrow z_1=4$ bzw. $z_2=-\frac{8}{5}$ (keine Lösung)

$z_1=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2$ bzw. $x_2=2$ sind die Integrationsgrenzen

Flächenintegral:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3}\left(\frac{5}{4}x^4-3x^2-8\right)dx = \left[\frac{x^5}{4}-x^3-8x\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left[\frac{2^5}{4}-2^3-8\cdot 2\right]-\left[\frac{(-2)^5}{4}-(-2)^3-8\cdot(-2)\right]=-32$$

Die Fläche: $A=|-32|=\underline{\underline{32\text{ FE}}}$

A9 Ausführliche Lösung

$P_{Max}(0\,|-8)$

$P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}(-1{,}09\,|-9{,}8)$

$P_{Min\_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}(1{,}09\,|-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76