Lösungen Differenzialrechnung IX

Ausführliche Lösung:

A1a	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente. Sind diese Kurvenpunkte Extrempunkte? Begründen Sie Ihre Entscheidung.	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ Ableitung: $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$ Waagerechte Tangenten: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ Die Ableitung f'(x) hat bei $x_{1/2}$ einfache Nullstellen und wechselt das Vorzeichen. Also hat f(x) zwei Extrempunkte.

A1b	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente. Sind diese Kurvenpunkte Extrempunkte? Begründen Sie Ihre Entscheidung.	$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ Waagerechte Tangenten: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=2$ Die Ableitung f'(x) hat bei $x_{1/2}$ einfache Nullstellen und wechselt das Vorzeichen. Also hat f(x) zwei Extrempunkte.

A1c	Aufgabe	
	Berechnen Sie die Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente. Sind diese Kurvenpunkte Extrempunkte? Begründen Sie Ihre Entscheidung.	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$ Ableitung: $f'(x)=-x^3+3x^2$ Waagerechte Tangenten: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2 \Rightarrow x_{1/2}=0\,;\,x_3=3$ Die Ableitung f'(x) hat an der Stelle $x_{1/2}$ = 0 eine doppelte Nullstelle, das bedeutet, es findet kein Vorzeichenwechsel statt. Also hat f(x) an dieser Stelle keinen Extrempunkt. x_3 = 3 ist einfache Nullstelle von f'(x), dort findet ein Vorzeichenwechsel statt. Also hat f(x) an dieser Stelle einen Extrempunkt.

A2	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f(x). Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$

A2 Ausführliche Lösung

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x-3$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrempunkte:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}=0 \mid \cdot\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow p=-8\,;\,q=12\,;\,D=4 \Rightarrow \boxed{x_1=6}\,;\,\boxed{x_2=2}$$

$$f''(x_1)=f''(6)=\frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Min} \quad f''(x_2)=f''(2)=-\frac{3}{2} \Rightarrow \text{rel Max}$$

rel Min: $f(x_1)=f(6)=0 \Rightarrow \boxed{P_{min}(6\mid 0)}$

rel Max: $f(x_2)=f(2)=4 \Rightarrow \boxed{P_{max}(2\mid 4)}$

Zum zeichnen des Graphen sind noch weitere Punkte nötig:

Schnittpunkt mit der $y-$Achse: $\boxed{P_y(0\mid 0)}$

Nullstellen: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x=0$

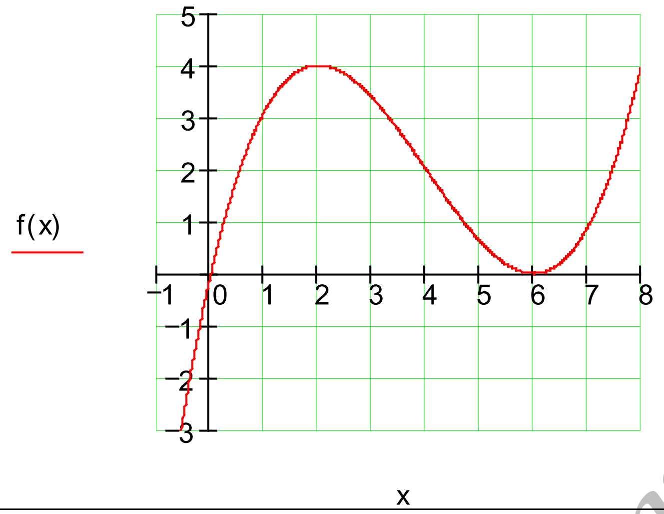
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x_{2/3}=0 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

Wertetabelle:

x	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	–6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875

A2 Ausführliche Lösung



A3 Aufgabe

Bestimmen Sie a so, dass die Funktion f(x) in x = 2 eine Extremstelle hat. Um welche Art von Extremstelle handelt es sich dabei?	$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$

A3 Ausführliche Lösung

$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4\,;\qquad f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2ax$

Ansatz: Extremstelle in x = 2 bedeutet:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

und damit $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4$ bzw. $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

Extrempunkte bei: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 2$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rel. Min bei } x_1 = 0}} \\ \Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{rel. Max bei } x_2 = 2}} \end{array} \right.$$

A4	**Aufgabe**	
	Gegeben ist eine Funktion f(x). Bestimmen Sie a so, dass der Extrempunkt des Graphen von f(x) auf der x- Achse liegt. Ist der Extrempunkt ein Hoch – oder ein Tiefpunkt?	$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+a$

A4 Ausführliche Lösung

$$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+a$$

Der Extrempunkt soll auf der x – Achse liegen, das bedeutet: $f(x_E)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x^2-6x$$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0 \text{ und } x_3=6$$

Überprüfung auf vorliegen einer Extremstelle:

$f''(x_{1/2})=f''(0)=0 \Rightarrow$ keine Extremstelle bei $x_{1/2}=0$

$f''(x_3)=f''(6)=\frac{2}{3}\cdot 6^2-6\cdot 6=18>0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_3=6$

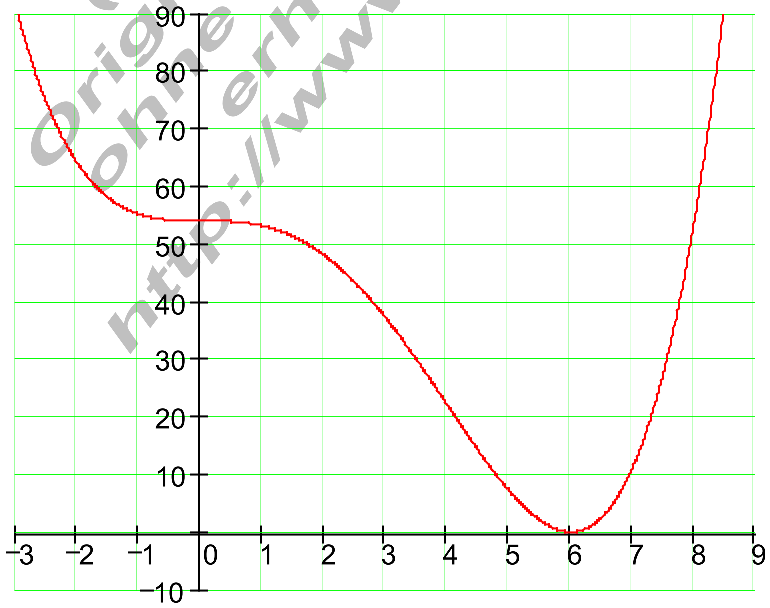
Bestimmung der Variablen a:

$$f(6)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4-6^3+a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=54}$$

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+54$ hat an der Stelle $x_E=6$ ein relatives Minimum,

dieses liegt auf der x – Achse : $P_{Min}(6\,|\,0)$

A4 Ausführliche Lösung



A5	**Aufgabe**	
	Die Funktion f(x) soll <u>keine</u> Extremstellen besitzen. Welche Bedingungen müssen für diesen Fall die Koeffizienten erfüllen und wie viele Nullstellen hat dann f(x)? Begründen Sie Ihre Antwort.	$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

A5 Ausführliche Lösung

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

Falls es keine Extrempunkte geben soll, muss gelten: $f'(x) \neq 0$

oder $f'(x) = 0$ mit doppelter Nullstelle (kein Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung).

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0}_{\text{quadratische Gleichung}}$$

$$p = \frac{2}{3}b\,;\, q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$\boxed{D < 0}$: Die quadratische Gleichung hat keine Lösung falls $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ ist.

Das bedeutet, $f(x)$ hat in diesem Fall keine waagerechten Tangenten.
Der Funktionsgraph von $f(x)$ verläuft vom 3. zum 1. Quadranten.
Die Funktion ist streng monoton wachsend.

$\boxed{D = 0}$: Die q. Gleichung hat eine doppelte Nullstelle falls $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c = 0$ ist.

Das bedeutet, $f(x)$ hat zwar eine waagerechte Tangente. Da aber für $f'(x)$ an dieser Stelle kein Vorzeichenwechsel erfolgt (doppelte Nullstelle), hat $f(x)$ keine Extremstellen.
Da $f(x)$ lt. Vorgabe keine Extremstellen besitzt, hat $f(x)$ genau eine Nullstelle.

A6	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = ax(x+3)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Die Verbindungsgerade von Hoch und Tiefpunkt begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche in Abhängigkeit von a. Fertigen Sie zuvor eine Skizze an.

A6 Ausführliche Lösung

$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$

$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \qquad f''(x) = 6ax + 12a$

Die Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$ bzw. $x_2 = -3$

$f''(x_1) = f''(-1) = 6a \cdot (-1) + 12a = a(-6+12) > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_1 = -1$

$f''(x_2) = f''(-3) = 6a \cdot (-3) + 12a = (-18+12) < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_2 = -3$

$P_{Max}: f(-3) = a \cdot (-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-3 \mid 0)}$

$P_{Min}: f(-1) = a \cdot (-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-1 \mid -4a)}$

Die Geradengleichung mit $P_{Max}(-3 \mid 0)$ und $P_{Min}(-1 \mid -4a)$:

$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1-(-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$

Punktprobe mit $P_{Max}(-3 \mid 0)$:

$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a \cdot (-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$

Achsenschnittpunkte von $g(x)$ sind: $P_y(0 \mid -6a)$ und $P_x(-3 \mid 0)$

Flächeninhalt des Dreiecks:

$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$ (es kann mit den Beträgen gerechnet werden).

A6 Ausführliche Lösung

Graphische Darstellung für $a = 1$.

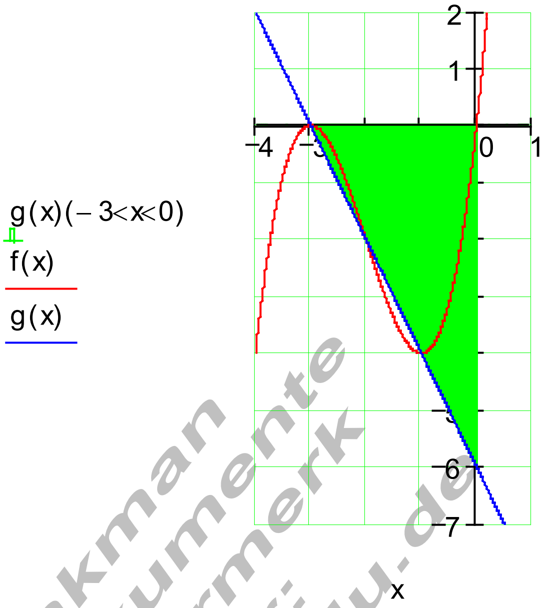
Die Gerade schneidet die x – Achse bei $P_x(-3\,|\,0)$ und die y – Achse bei $P_y(0\,|\,-6)$

Für die Flächenberechnung kann mit Beträgen gerechnet werden, da der Flächeninhalt positiv ist.

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

mit $g = 3$ und $h = 6$ wird:

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ \text{FE}$$



A7a Aufgabe

Untersuchen Sie auf Extrempunkte:

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
$f'(x)$	0,75	0	−0,25	0	0,75

A7 Ausführliche Lösung

a)

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
$f'(x)$	0,75	0	−0,25	0	0,75

Es gibt zwei Extrempunkte:

Bei $x = 1$ erfolgt ein Vorzeichenwechsel für $f'(x)$ von $\boxed{+} \rightarrow \boxed{-} \Rightarrow$ rel. Max.

Bei $x = 2$ erfolgt ein Vorzeichenwechsel für $f'(x)$ von $\boxed{-} \rightarrow \boxed{+} \Rightarrow$ rel. Min.

A7b Aufgabe

Untersuchen Sie auf Extrempunkte:

x	−3	−2	−1	0	1
$f(x)$	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
$f'(x)$	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

A7 Ausführliche Lösung

b)

x	−3	−2	−1	0	1
$f(x)$	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
$f'(x)$	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

Im Intervall $[-3;-2]$ liegt ein relatives Minimum

$f'(x)$ hat ein Vorzeichenwechsel von $\boxed{-} \to \boxed{+}$

A8a Aufgabe

Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen. $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$

A8 Ausführliche Lösung

a) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

2. Ableitung: $f''(x)=\frac{3}{4}x$

3. Ableitung: $f'''(x)=\frac{3}{4}$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\approx 1{,}016>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=\sqrt{2}$

$f''(x_2)=f''\left(-\sqrt{2}\right)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\approx -1{,}016<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-\sqrt{2}$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx -0{,}707\,;\, f(x_2)=f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}707$

Die Extrempunkte:

$P_{Min}\left(\sqrt{2}\approx 1{,}414 \,|\, -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx -0{,}707\right)$ $P_{Max}\left(-\sqrt{2}\approx -1{,}414 \,|\, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}707\right)$

A8 **Ausführliche Lösung**

a) **Wendepunkt**

$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x \qquad f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4} \qquad f''(x)=\frac{3}{4}x \qquad f'''(x)=\frac{3}{4}$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=0 \Rightarrow x_w=0$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$f'''(x_w)=\frac{3}{4}\neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x=x_w=0$

Wendepunktkoordinaten:

$y_w=f(x_w)=f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0\,|\,0)}}$

A8 **Ausführliche Lösung**

a) **Achsenschnittpunkte** von $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

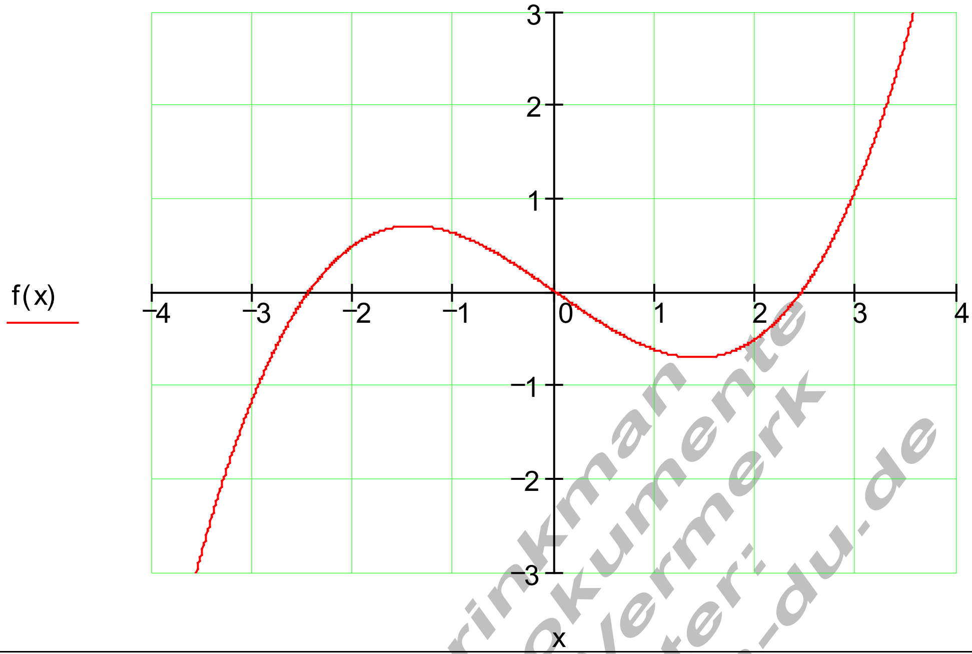
$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \,\Big|+\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2=\frac{3}{4} \,\Big|\cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2=6 \Rightarrow x_2=-\sqrt{6} \qquad x_3=\sqrt{6}$$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(-\sqrt{6}\approx -2{,}449\,|\,0\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(\sqrt{6}\approx 2{,}449\,|\,0\right)}}$

A8	**Ausführliche Lösung**
a)	

A8b	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

A8 Ausführliche Lösung

b) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

2. Ableitung: $f''(x)=x-1$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=2$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''(0)=-1<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=0$

$f''(x_2)=f''(2)=1>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_2=2$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f(0)=4 \qquad f(x_2)=f(2)=\frac{10}{3}$

Die Extrempunkte:

$P_{Max}(0|4) \qquad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3}\approx 3{,}333\right)$

A8 Ausführliche Lösung

b) **Wendepunkt**

$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x \qquad f''(x)=x-1 \qquad f'''(x)=1$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x_w=1$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$f'''(x_w)=f'''(1)=1\neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x=x_w=1$

Wendepunktkoordinaten:

$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+4=\frac{22}{6}=3,\overline{6} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(1\,|\,\frac{22}{6}=3,\overline{6}\right)}}$

A8 Ausführliche Lösung

b) **Achsenschnittpunkte** von $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0\,|\,4)}}$

Nullstellen:

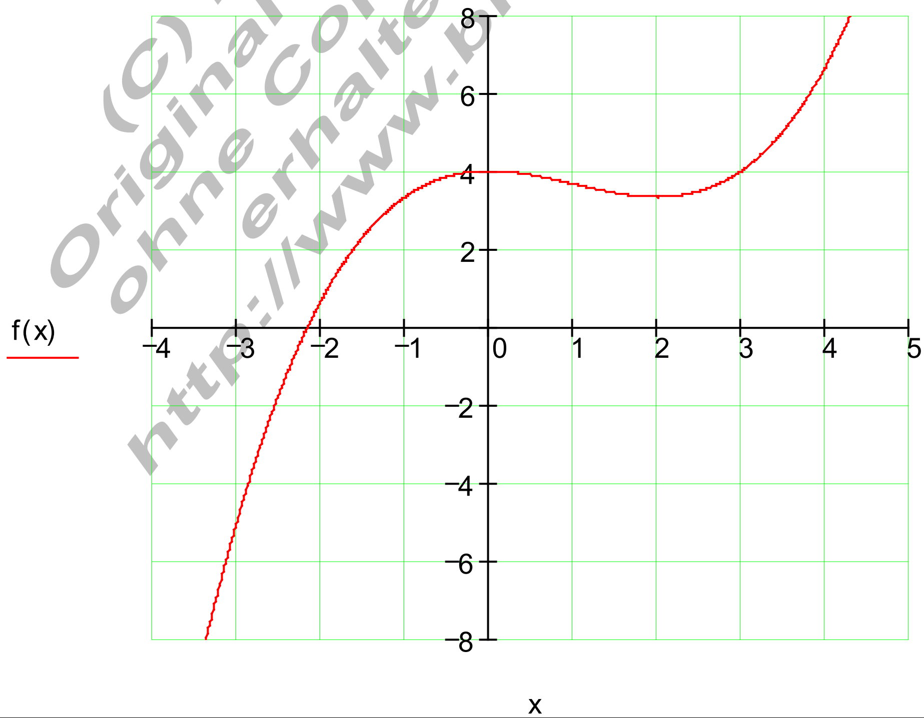
$x_1\approx -2{,}175$ numerisch gefunden

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1}(x_1\approx -2{,}175\,|\,0)}}$

A8 Ausführliche Lösung

b)



A8c	Aufgabe	
	Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

A8 Ausführliche Lösung

c) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

1. Ableitung: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

2. Ableitung: $f''(x) = -3x^2 + 6x$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ kein Extremwert bei $x_1 = 0$

$f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ kein Extremwert bei $x_2 = 0$

$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_3 = 3$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1) = f(0) = -2 \qquad f(x_2) = f(0) = -2 \qquad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$

Die Extrempunkte:

$$\underline{\underline{P_{Max}\left(3 \middle| \frac{19}{4} = 4{,}75\right)}}$$

A8	**Ausführliche Lösung**

c) **Wendepunkte**

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \qquad f''(x) = -3x^2 + 6x \qquad f'''(x) = -6x + 6$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x = x_{w1} = 0$

$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $x = x_{w2} = 2$

Wendepunktkoordinaten:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0\,|\,-2)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}(2\,|\,2)}}$$

A8	**Ausführliche Lösung**

c) **Achsenschnittpunkte** von $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0\,|\,-2)}}$

Nullstellen:

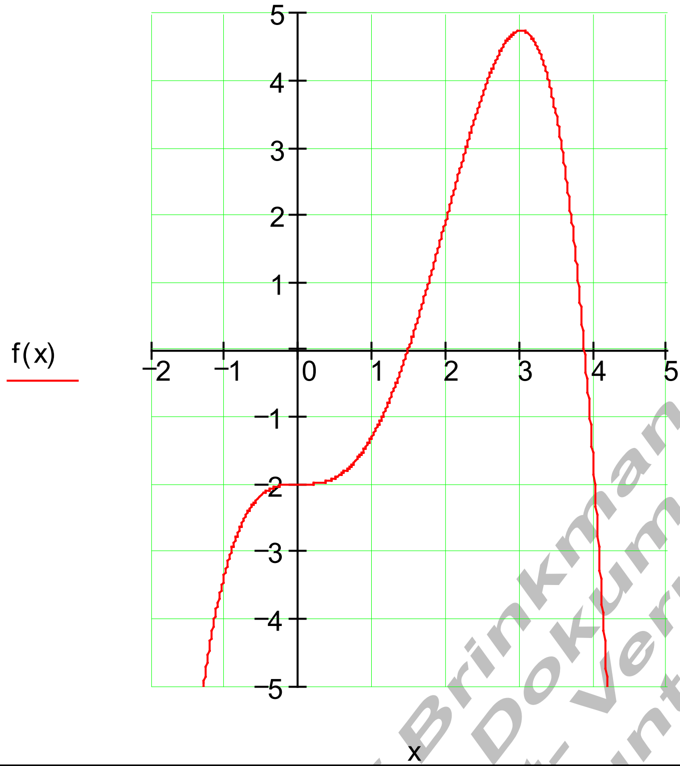
$x_1 \approx 1{,}467 \qquad x_2 \approx 3{,}861$ numerisch gefunden

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1}(x_1 \approx 1{,}467\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(x_2 \approx 3{,}861\,|\,0)}}$

A8 Ausführliche Lösung

c)



A8d Aufgabe

Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}$

A8 Ausführliche Lösung

d) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}$

1. Ableitung: $f'(x)=x^2-2x-8$

2. Ableitung: $f''(x)=2x-2$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-2; x_2=4$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''(-2)=-6<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=-2$

$f''(x_2)=f''(4)=6>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_2=4$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f(-2)=18$ $\qquad f(x_2)=f(4)=-18$

Die Extrempunkte:

$\underline{\underline{P_{Max}(-2|18) \qquad P_{Min}(4|-18)}}$

A8 Ausführliche Lösung

d) **Wendepunkt**

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}$$

$$f'(x)=x^2-2x-8 \qquad f''(x)=2x-2 \qquad f'''(x)=2$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x_w=1$$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$$f'''(x_w)=f'''(1)=2\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_w=1$$

Wendepunktkoordinaten:

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{3}-1-8+\frac{26}{3}=0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

A8 Ausführliche Lösung

d) **Achsenschnittpunkte** von $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{26}{3}=8,\overline{6}\right)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}=0$$

HORNER:

$$\begin{array}{lccccc}
 & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} & \\
x=1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & f(1)=0 \Rightarrow \quad x_1=1
\end{array}$$

Restpolynom: $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{26}{3}=0\,|\cdot 3$

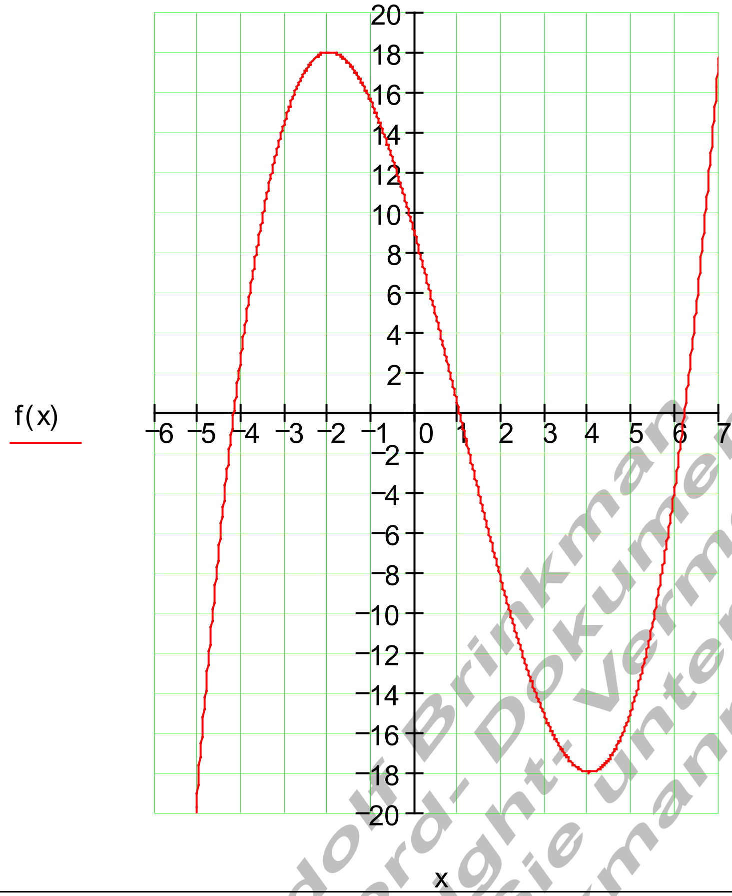
$$\Leftrightarrow x^2-2x-26=0$$

$$p=-2 \qquad q=-26 \qquad \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+26=27$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad \begin{array}{l} x_2=1+\sqrt{27}\approx 6{,}196 \\ x_3=1-\sqrt{27}\approx -4{,}196 \end{array}$$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$$\underline{\underline{P_{x1}(1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(1+\sqrt{27}\approx 6{,}196\,|\,0\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{x3}\left(1-\sqrt{27}\approx -4{,}196\,|\,0\right)}}$$

A8	**Ausführliche Lösung**
	d) 

A8e	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

A8	**Ausführliche Lösung**

e) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

1. Ableitung: $f'(x)=x^3-2x$

2. Ableitung: $f''(x)=3x^2-2$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x_1=0; x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''(0)=-2<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=0$

$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_2=\sqrt{2}$

$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_3=-\sqrt{2}$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f(0)=0 \qquad f(x_2)=f\left(\sqrt{2}\right)=-1 \qquad f(x_3)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-1$

Die Extrempunkte:

$P_{Max}(0|0) \qquad P_{Min1}\left(\sqrt{2}\approx 1{,}414|-1\right) \qquad P_{Min2}\left(-\sqrt{2}\approx -1{,}414|-1\right)$

A8 **Ausführliche Lösung**

e) **Wendepunkte**

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2 \qquad f'(x)=x^3-2x \qquad f''(x)=3x^2-2 \qquad f'''(x)=6x$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2=0\,|+2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=2\,|:3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\,|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$$

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816$$

Wendepunktkoordinaten:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555 \text{ weil } f(-x)=f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816\,|\,-\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816\,|\,-\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}}$$

A8 **Ausführliche Lösung**

e) **Achsenschnittpunkte** von $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

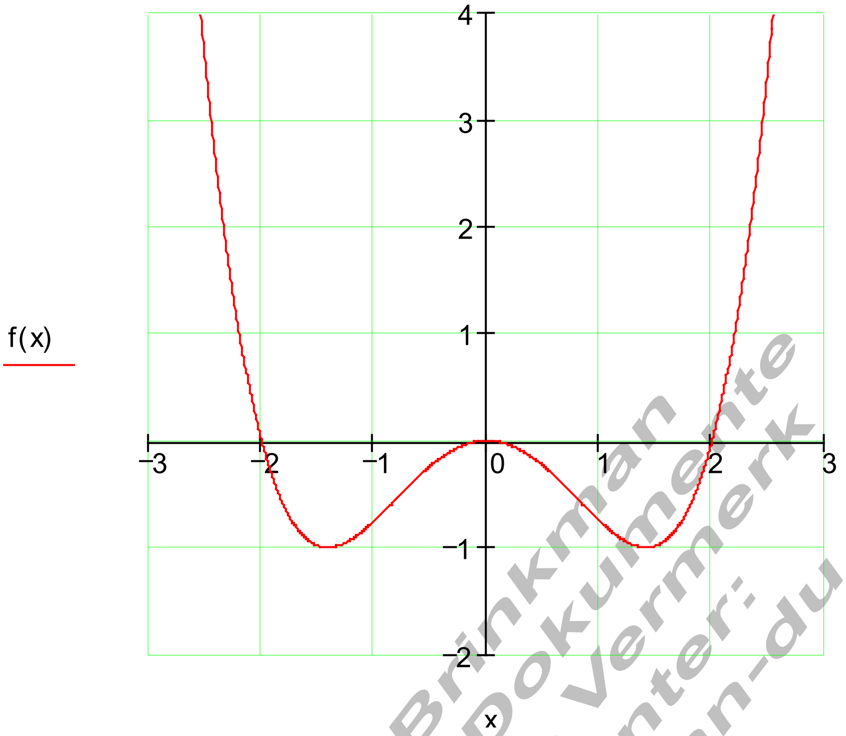
Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$
$$\frac{1}{4}x^2-1=0\,|+1 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 2$$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1/2}(0\,|\,0)}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{P_{x3/4}(\pm 2\,|\,0)}}$

A8	**Ausführliche Lösung**
	e) 

A8f	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3$

A8 Ausführliche Lösung

f) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3$

1. Ableitung: $f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

2. Ableitung: $f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2}$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1=0$

Erste Nullstelle raten zu $x_1=2$ Restpolynom: $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

ergibt weitere Lösungen: $x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}; x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''(2)=-1{,}5<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=2$

$f''(x_2)=f''\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 1{,}971>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}$

$f''(x_3)=f''\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 6{,}279>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f(2)=0 \quad f(x_2)=f\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -0{,}136 \quad f(x_3)=f\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -3{,}098$

Die Extrempunkte:

$P_{Max}(2|0) \quad P_{Min1}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\approx 2{,}686|-0{,}136\right) \quad P_{Min2}\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\approx -0{,}186|-3{,}098\right)$

A8 Ausführliche Lösung

f) **Wendepunkte**

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3 \qquad f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

$$f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2} \qquad f'''(x)=6x-9$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+\frac{9}{2}=0 \,|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{3}{2}=0$$

$$p=-3 \qquad q=\frac{3}{2} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2{,}366 \qquad x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0{,}634$$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$$f'''(x_{w1})=f'''(2{,}366)=6\cdot 2{,}366-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2{,}366$$

$$f'''(x_{w1})=f'''(0{,}634)=6\cdot 0{,}634-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0{,}634$$

Wendepunktkoordinaten:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f(2{,}366)=\frac{1}{4}\cdot 2{,}366^4-\frac{3}{2}\cdot 2{,}366^3+\frac{9}{4}\cdot 2{,}366^2+2{,}366-3\approx -0{,}07$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f(0{,}634)=\frac{1}{4}\cdot 0{,}634^4-\frac{3}{2}\cdot 0{,}634^3+\frac{9}{4}\cdot 0{,}634^2+0{,}634-3\approx -1{,}80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2{,}366 \,|\, y_{w1}\approx -0{,}07\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0{,}634 \,|\, y_{w2}\approx -1{,}80\right)}}$$

A8	**Ausführliche Lösung**

f)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0\,|\,-3)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3=0$$

HORNER

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\ x=-1 & \downarrow & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -4 & 3 \\ & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad f(-1)=0 \Rightarrow x_1=-1$$

Restpolynom: $\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{4}x^2+4x-3=0$

HORNER

$$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\ x=2 & \downarrow & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 \\ & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \quad f(2)=0 \Rightarrow x_2=2$$

Restpolynom: $\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}=0\,|\cdot 4$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

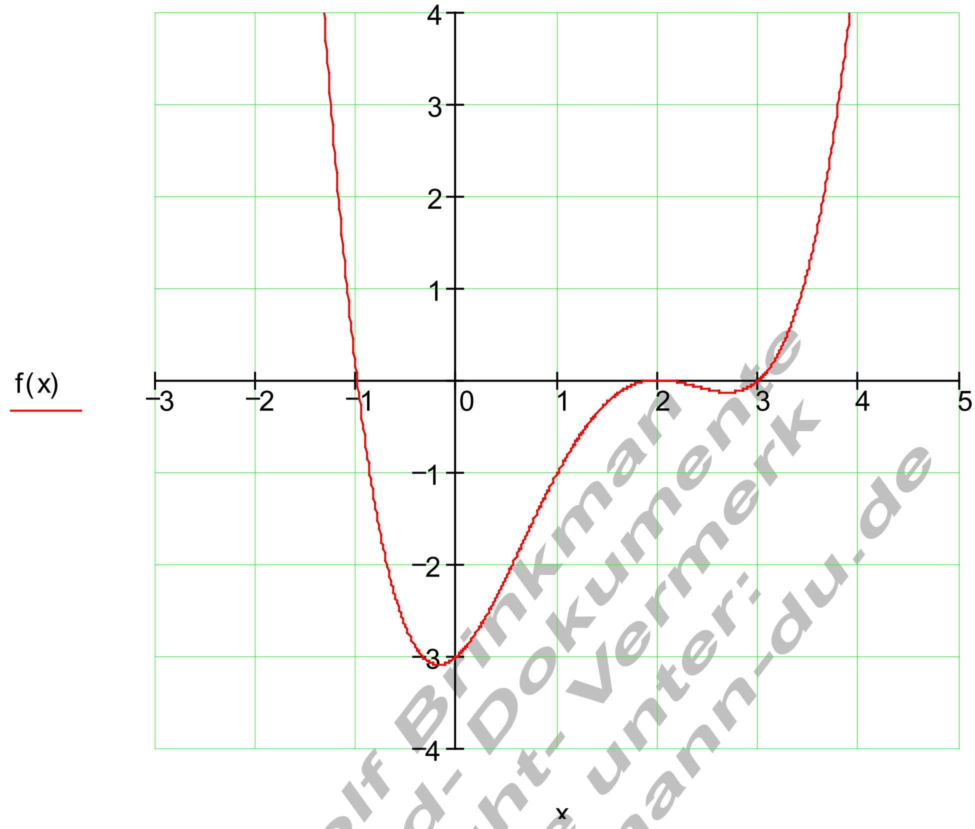
$$p=-5 \quad q=6 \quad \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}-\frac{24}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$x_{3/4}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_3=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3 \qquad x_4=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

x – Werte nach Größe sortieren: $x_1=-1 \quad x_{2/3}=2 \quad x_4=3$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1}(-1\,|\,0)}}$ $\underline{\underline{P_{x2/3}(2\,|\,0)}}$ $\underline{\underline{P_{x4}(3\,|\,0)}}$

A8	**Ausführliche Lösung**
	f) 

A8g	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie Extrempunkte, Wendepunkte, Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

A8 Ausführliche Lösung

g) **Extrempunkte**

Funktion: $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

1. Ableitung: $f'(x)=\frac{5}{27}x^4-2x^2+3$

2. Ableitung: $f''(x)=\frac{20}{27}x^3-4x$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4-2x^2+3=0$ (biquadratische Gleichung)

$x_1=3; x_2=-3; x_3=\sqrt{\frac{9}{5}}; x_4=-\sqrt{\frac{9}{5}}$

Überprüfung ob ein Extremwert vorliegt:

$f''(x_1)=f''(3)=8>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_1=3$

$f''(x_2)=f''(-3)=-8<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2=-3$

$f''(x_3)=f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right)\approx -3,578<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_3=\sqrt{\frac{9}{5}}$

$f''(x_4)=f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right)\approx 3,578>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_4=-\sqrt{\frac{9}{5}}$

Berechnung der Extremwerte:

$f(x_1)=f(3)=0$ $\quad f(x_2)=f(-3)=0$

$f(x_3)=f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right)\approx 2,576$ $\quad f(x_4)=f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right)\approx -2,576$

Die Extrempunkte:

$P_{Min1}(3|0)$ $\quad P_{Max1}(-3|0)$ $\quad P_{Max2}\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\approx 1,342|2,576\right)$

$P_{Min2}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\approx -1,342|-2,576\right)$

A8 Ausführliche Lösung

g) **Wendepunkte**

$$f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x \qquad f'(x)=\frac{5}{27}x^4-2x^2+3$$

$$f''(x)=\frac{20}{27}x^3-4x \qquad f'''(x)=\frac{60}{27}x^2-4$$

Notwendige Bedingung für Wendepunkte:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{20}{27}x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_{w1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2-4 \,|+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2=4 \,|:\frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{27}{5}\,|\sqrt{} \Rightarrow x_{w2/3}=\pm\sqrt{\frac{27}{5}}\approx\pm 2{,}324$$

Überprüfung auf Wendepunkt:

$$f'''(x_{w1})=f'''(0)=-4\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=0$$

$$f'''(x_{w2})=f'''\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\sqrt{\frac{27}{5}}$$

$$f'''(x_{w3})=f'''\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{27}{5}}$$

Wendepunktkoordinaten:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f(0)=0$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3+3\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)\approx 1{,}115$$

$$y_{w3}=f(x_{w3})=f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3+3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)\approx -1{,}115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\approx 2{,}324\,|\,y_{w2}\approx 1{,}115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\approx -2{,}324\,|\,y_{w3}\approx -1{,}115\right)}}$$

A8 **Ausführliche Lösung**

g)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

Schnittpunkt mit der y – Achse: $\underline{\underline{P_y(0|0)}}$

Nullstellen:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4-\frac{2}{3}x^2+3\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{27}x^4-\frac{2}{3}x^2+3=0\text{ Substitution: }x^2=z$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{27}z^2-\frac{2}{3}z+3=0|\cdot 27\text{ quadratische Gleichung in z}$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$$p=-18\qquad q=81\qquad\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\qquad z_1=9\quad z_2=9\qquad z_1=9=x^2\Rightarrow x_{2/3}=\pm3\quad z_2=9=x^2\Rightarrow x_{4/5}=\pm3$$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}}$ $\underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}}$ $\underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$

A8 **Ausführliche Lösung**

g)