Lösungen Differenzialrechnung I

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Chemische Reaktionen können mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ablaufen. Bringt man z.B. Zink in Salzsäure, so entsteht Wasserstoff.
Die folgende Tabelle gibt die Menge des Wasserstoffs in Abhängigkeit von der Zeit an.

Zeit in s	2	4	6	8	10	12
Menge Wasserstoff in ml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

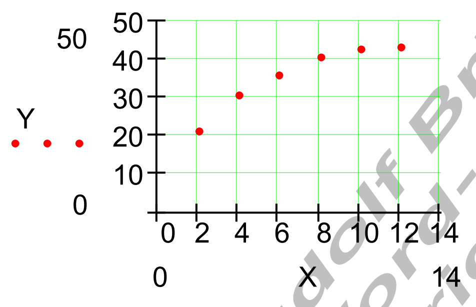
a) Erstellen Sie hierzu ein Diagramm.

b) Was lässt sich über die Wasserstoffproduktion aussagen?

c) Berechnen Sie die Änderungsraten in den folgenden Intervallen:
[2 ; 4] ; [4 ; 8] ; [8 ; 12]

A1 Ausführliche Lösung

a)



b) Die Wasserstoffproduktion pro Zeiteinheit wird immer geringer.

c) Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$[2;4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5-21}{4-2} = 4,75$

$[4;8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40,5-30,5}{8-4} = 2,5$

$[8;12]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43-40,5}{12-8} = 0,625$

I	[2 ; 4]	[4 ; 8]	[8 ; 12]
$\frac{\text{ml}}{\text{s}}$	4,75	2,5	0,625

A2 Aufgabe

Berechnen Sie die Änderungsraten von $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ auf den Intervallen $[1;1{,}5]$; $[-4;-2{,}5]$; $[2;t]$ mit $t\neq 2$; $[3;3+h]$ mit $h>0$.

A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[1;1{,}5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$[-4;-2{,}5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-2{,}5)-f(-4)}{-2{,}5-(-4)}=\frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}}=\underline{\underline{-\frac{21}{8}}}$$

$$[2;t]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}(t-2)\ \text{für } t\neq 2}}$$

$$[3;3+h]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}=\frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h}=\frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h}=\underline{\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h}}$$

A3	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$	
	a)	Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f(x) auf dem Intervall I = [2 ; 5]
	b)	Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante s(x) durch P (2 | f(2)) und Q (5 | f(5)).
	c)	Berechnen Sie die momentane Änderungsrate von f(x) an der Stelle x = 2.
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und s(x) in ein Koordinatensystem.

A3 Ausführliche Lösung

a)

$f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ die mittlere Änderungsrate in $[2;5]$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3{,}75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}75-(-3)}{3}=\frac{6{,}75}{3}=\underline{\underline{2{,}25}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) Die Gleichung der Sekante s(x) durch die Punkte P und Q ist genauso zu bestimmen wie die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte.

$P(2\,|\,f(2)) \Rightarrow$ aus Aufgabenteli a) $P(2\,|\,-3)$

$Q(5\,|\,f(5)) \Rightarrow$ aus Aufgabenteli a) $Q(5\,|\,3{,}75)$

$s(x)=a_1\cdot x+a_0$ mit $a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2{,}25$ siehe Aufgabenteil a)

$\Rightarrow s(x)=2{,}25x+a_0$

$P(2\,|\,-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2{,}25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7{,}5$

$\Rightarrow s(x)=2{,}25x-7{,}5$ ist die Sekantengleichung

A3 Ausführliche Lösung

c) momentane Änderungsrate an der Stelle $x=2$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

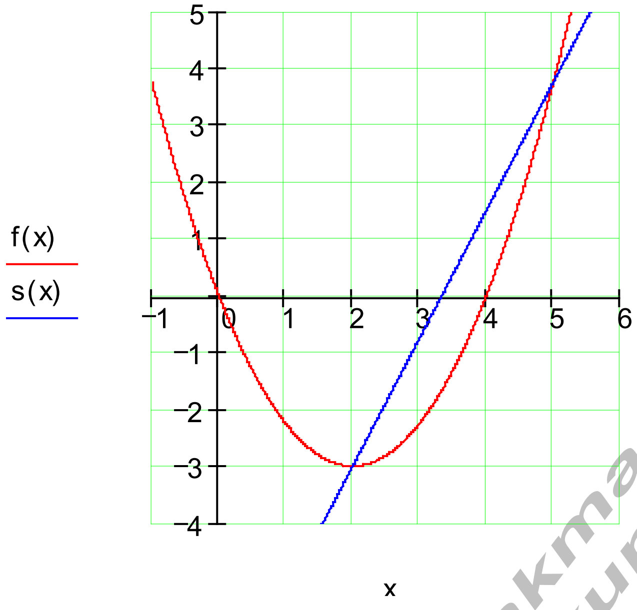
$$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x \text{ mittlere Änderungsrate im Intervall } [2;\Delta x]$$

für $\Delta x\to 0$ wird $\frac{3}{4}\Delta x\to 0$

Die momentane Änderungsrate von $f(x)$ an der Stelle $x=2$ ist 0

A3 Ausführliche Lösung

d)



A4 Aufgabe

Beim freien Fall bewegt sich ein Körper so, dass er in der Zeit t den Weg $s(t) = 5 \cdot t^2$ zurücklegt (s in Meter, t in Sekunden)

Bestimmen Sie seine momentane Geschwindigkeit zu den Zeiten t = 1; 2; 3

A4 Ausführliche Lösung

Die momentane Geschwindigkeit ist gleichbedeutend mit der momentanen Änderungsrate.

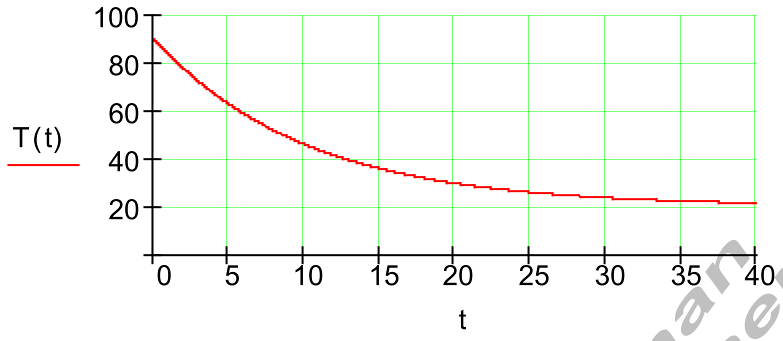
$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow \text{für } \Delta x \to 0 \text{ gilt: } 10 + 5\Delta x \to 10$$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow \text{für } \Delta x \to 0 \text{ gilt: } 20 + 5\Delta x \to 20$$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow \text{für } \Delta x \to 0 \text{ gilt: } 30 + 5\Delta x \to 30$$

A5 Aufgabe

Ein Pudding kühlt nach seiner Zubereitung ab.
Der Term $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, T(t) in Grad Celsius)
beschreibt den Abkühlungsvorgang.
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion T(t).



a)	Von welcher anfänglichen Temperatur geht man aus?
b)	Welche Temperatur hat der Pudding, wenn er abgekühlt ist?
c)	Zu welcher Zeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Pudding abkühlt am größten?
d)	Berechnen Sie für die ersten 10 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.

A5 Ausführliche Lösung

a)	Die anfängliche Temperatur lässt sich aus dem Graphen zu 90 ^{0}C ablesen.
b)	Die Funktionswerte streben asymptotisch gegen den Wert 20 ^{0}C.
c)	Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist zu Beginn des Vorgangs am größten.
d)	$[0;10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0}$ mit $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20 + 70 \cdot \underbrace{e^{-0,1 \cdot 0}}_{1} = 90$ wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$ Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Änderungsrate negativ ist, die Temperatur des Puddings nimmt ab.