Ergebnisse und ausführliche Lösungen für das Aufgabenblatt Addition und Subtraktion von Vektoren I

Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	$\left\|\vec{a}\right\| = a = 4,6$ $\left\|\vec{b}\right\| = b = 4,0$ $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60^0$ $\left\|\vec{c}\right\| = c = 7,454$ $\left\|\vec{d}\right\| = d = 4,331$ $\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 27,693^0$ $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) = 53,11^0$
	b)	$\left\|\vec{a}\right\| = a = 4,2$ $\left\|\vec{b}\right\| = b = 3,8$ $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 120^0$ $\left\|\vec{c}\right\| = c = 4,015$ $\left\|\vec{d}\right\| = d = 6,931$ $\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 55,05^0$ $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) = 28,346^0$
	c)	$\left\|\vec{a}\right\| = a = 4,7$ $\left\|\vec{b}\right\| = b = 3,2$ $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 250^0$ $\left\|\vec{c}\right\| = c = 4,695$ $\left\|\vec{d}\right\| = d = 6,528$ $\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 39,828^0$ $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) = 27,427^0$
	d)	$\left\|\vec{a}\right\| = a = 3,5$ $\left\|\vec{b}\right\| = b = 4,2$ $\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 290^0$ $\left\|\vec{c}\right\| = c = 6,32$ $\left\|\vec{d}\right\| = d = 4,454$ $\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = 38,642^0$ $\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) = 62,397^0$

E2	Ergebnis
	$\left\|\vec{F_1}\right\| = F_1 \approx 25,456\,kN$ $\left\|\vec{F_2}\right\| = F_2 \approx 34,773\,kN$ Strebe s_1 wird auf Zug, Strebe s_2 auf Druck belastet.

E3	Ergebnis
	Der Winkel zwischen beiden Vektoren muss 120^0 betragen.

E4	Ergebnis
	$\left\|\vec{R}\right\| \approx 91,023\,N$ $\alpha_1 = \sphericalangle\left(\vec{R};\vec{F_1}\right) \approx 19,672^0$ $\alpha_2 = \sphericalangle\left(\vec{R};\vec{F_2}\right) \approx 30,328^0$

E5	Ergebnis
	Kursabweichung in südlicher Richtung etwa 11,837 Grad. Geschwindigkeit über dem Meeresboden etwa 31,024 Knoten, das sind etwa 57,456 km/h.

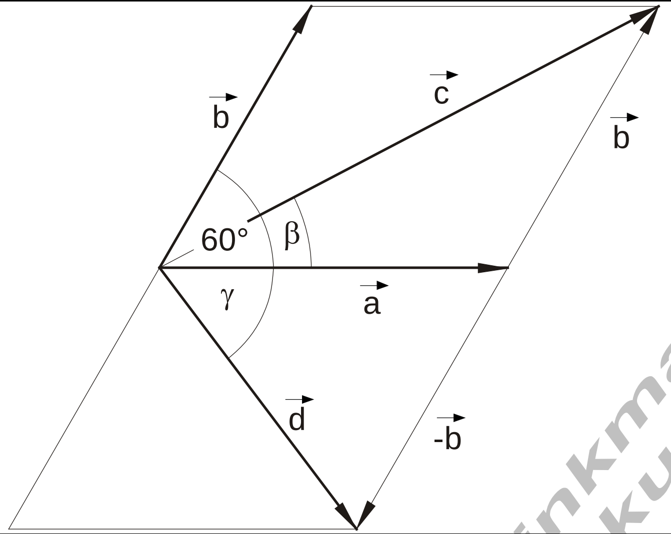
E6	Ergebnis
	Auf das Flugzeug eine Kraft von 12,523 kN. Winkel zur gewünschten Flugroute $28,153^0$.

Ausführliche Lösung

A1 Ausführliche Lösung

$\left|\vec{a}\right| = a = 4{,}6 \qquad \left|\vec{b}\right| = b = 4{,}0 \qquad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60^0$

a)



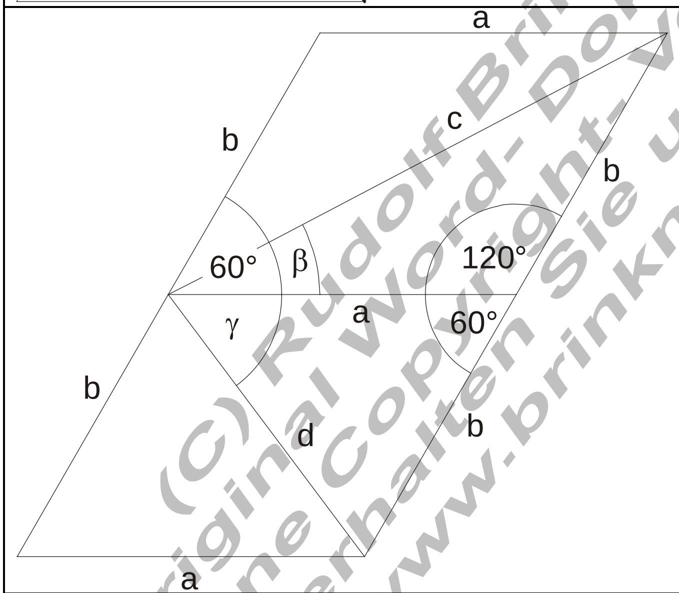
Die zeichnerische Lösung ergibt:

$\left|\vec{c}\right| \approx 7{,}4$

$\left|\vec{d}\right| \approx 4{,}3$

$\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) \approx 27{,}7^0$

$\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) \approx 53{,}1^0$



Die rechnerische Lösung erfolgt mit Hilfe des Kosinussatzes.
Ansatz:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(120^0\right)$

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(60^0\right)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\left(\beta\right)$

$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\left(\gamma\right)$

$\cos\left(\beta\right) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\left(\gamma\right) = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}$

$$c^2 = 4{,}6^2 + 4^2 - 2 \cdot 4{,}6 \cdot 4 \cdot \cos\left(120^0\right) \approx 55{,}56 \Rightarrow c = \sqrt{c^2} = \underline{\underline{\left|\vec{c}\right| \approx 7{,}454}}$$

$$d^2 = 4{,}6^2 + 4^2 - 2 \cdot 4{,}6 \cdot 4 \cdot \cos\left(60^0\right) \approx 18{,}76 \Rightarrow d = \sqrt{d^2} = \underline{\underline{\left|\vec{d}\right| \approx 4{,}331}}$$

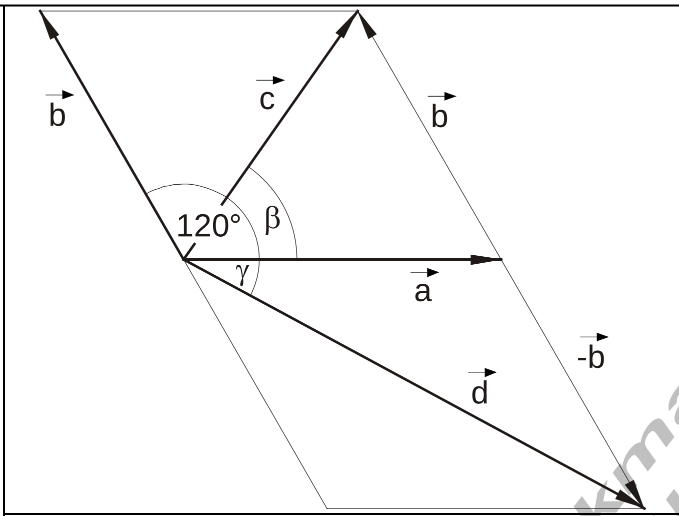
$$\cos\left(\beta\right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0{,}885 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx \underline{\underline{27{,}693^0}}$$

$$\cos\left(\gamma\right) = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad} \approx 0{,}6 \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}\right) \approx \underline{\underline{53{,}11^0}}$$

A1 Ausführliche Lösung

$\left|\vec{a}\right| = a = 4{,}2 \qquad \left|\vec{b}\right| = b = 3{,}8 \qquad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 120^0$

b)



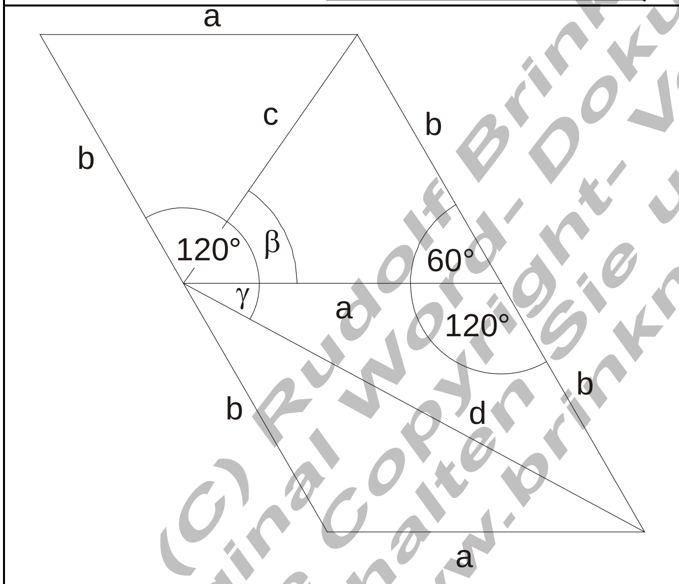
Die zeichnerische Lösung ergibt:

$\left|\vec{c}\right| \approx 4{,}0$

$\left|\vec{d}\right| \approx 6{,}9$

$\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) \approx 54{,}9^0$

$\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) \approx 28{,}3^0$



Die rechnerische Lösung erfolgt mit Hilfe des Kosinussatzes.
Ansatz:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(60^0\right)$

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(120^0\right)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\left(\beta\right)$

$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\left(\gamma\right)$

$\cos\left(\beta\right) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

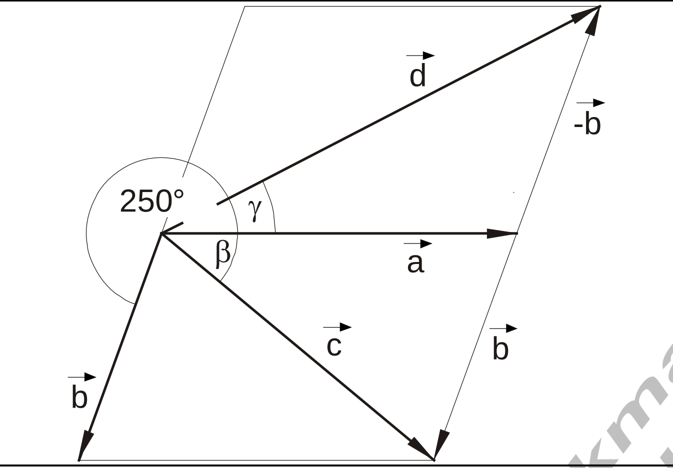
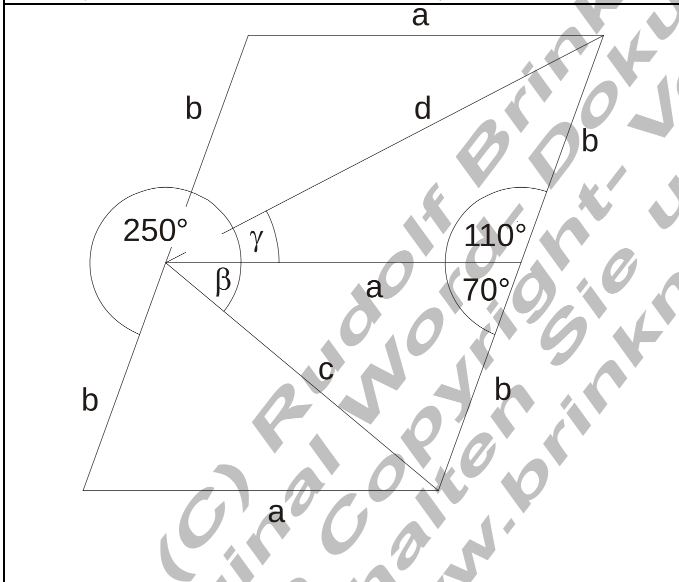
$\cos\left(\gamma\right) = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}$

$$c^2 = 4{,}2^2 + 3{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}8 \cdot \cos\left(60^0\right) \approx 16{,}12 \Rightarrow c = \sqrt{c^2} = \underline{\underline{\left|\vec{c}\right| \approx 4{,}015}}$$

$$d^2 = 4{,}2^2 + 3{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}8 \cdot \cos\left(120^0\right) \approx 48{,}04 \Rightarrow d = \sqrt{d^2} = \underline{\underline{\left|\vec{d}\right| \approx 6{,}931}}$$

$$\cos\left(\beta\right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0{,}573 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx \underline{\underline{55{,}05^0}}$$

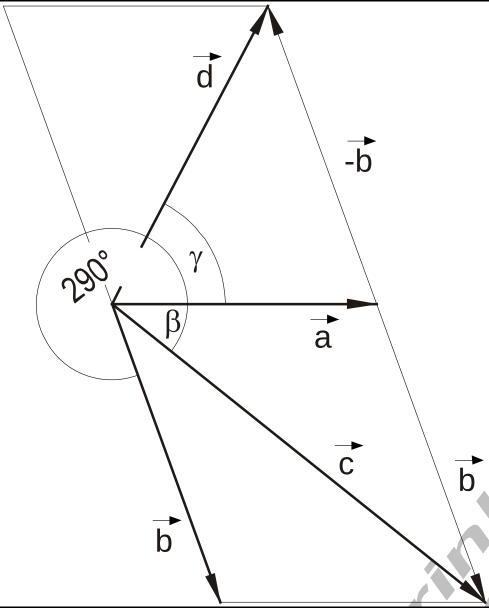
$$\cos\left(\gamma\right) = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad} \approx 0{,}88 \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}\right) \approx \underline{\underline{28{,}346^0}}$$

<table>
<tr><td>A1</td><td colspan="3">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">$\left|\vec{a}\right| = a = 4,7 \qquad \left|\vec{b}\right| = b = 3,2 \qquad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 250^0$</td></tr>
<tr><td></td><td>c)</td><td>
</td><td>Die zeichnerische Lösung ergibt:
$\left|\vec{c}\right| \approx 4,7$
$\left|\vec{d}\right| \approx 6,5$
$\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) \approx 39,8^0$
$\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) \approx 27,4^0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td><td>Die rechnerische Lösung erfolgt mit Hilfe des Kosinussatzes.
Ansatz:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(70^0\right)$
$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(110^0\right)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\left(\beta\right)$
$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\left(\gamma\right)$
$\cos\left(\beta\right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$\cos\left(\gamma\right) = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$c^2 = 4,7^2 + 3,2^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,2 \cdot \cos\left(70^0\right) \approx 22,042 \Rightarrow c = \sqrt{c^2} = \underline{\underline{\left|\vec{c}\right| \approx 4,695}}$
$d^2 = 4,7^2 + 3,2^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,2 \cdot \cos\left(110^0\right) \approx 42,618 \Rightarrow d = \sqrt{d^2} = \underline{\underline{\left|\vec{d}\right| \approx 6,528}}$
$\cos\left(\beta\right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0,768 \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx \underline{\underline{39,828^0}}$
$\cos\left(\gamma\right) = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad} \approx 0,888 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}\right) \approx \underline{\underline{27,427^0}}$</td></tr>
</table>

A1 Ausführliche Lösung

$\left|\vec{a}\right| = a = 3,5 \qquad \left|\vec{b}\right| = b = 4,2 \qquad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 290^0$

d)



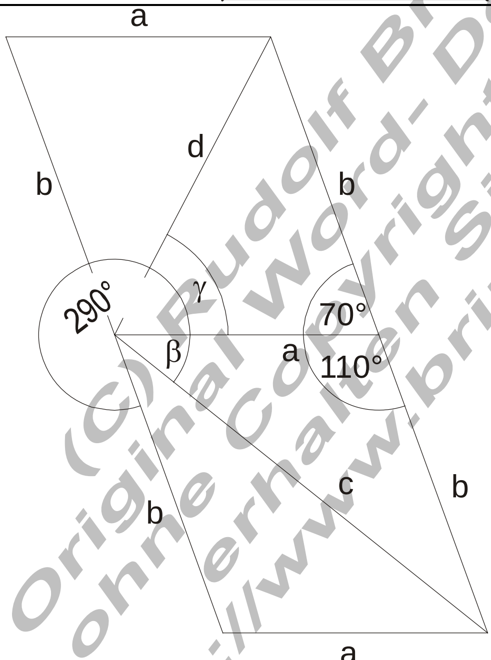
Die zeichnerische Lösung ergibt:

$\left|\vec{c}\right| \approx 6,3$

$\left|\vec{d}\right| \approx 4,5$

$\beta = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) \approx 38,6^0$

$\gamma = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{d}\right) \approx 62,3^0$



Die rechnerische Lösung erfolgt mit Hilfe des Kosinussatzes.
Ansatz:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(110^0\right)$

$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\left(70^0\right)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\left(\beta\right)$

$b^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\left(\gamma\right)$

$\cos\left(\beta\right) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\left(\gamma\right) = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}$

$$c^2 = 3,5^2 + 4,2^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 4,2 \cdot \cos\left(110^0\right) \approx 39,945 \Rightarrow c = \sqrt{c^2} = \underline{\underline{\left|\vec{c}\right| \approx 6,32}}$$

$$d^2 = 3,5^2 + 4,2^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 4,2 \cdot \cos\left(70^0\right) \approx 19,835 \Rightarrow d = \sqrt{d^2} = \underline{\underline{\left|\vec{d}\right| \approx 4,454}}$$

$$\cos\left(\beta\right) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0,7,81 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \approx \underline{\underline{38,642^0}}$$

$$\cos\left(\gamma\right) = \frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad} \approx 0,4,63 \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2}{2ad}\right) \approx \underline{\underline{62,397^0}}$$

A2 Ausführliche Lösung

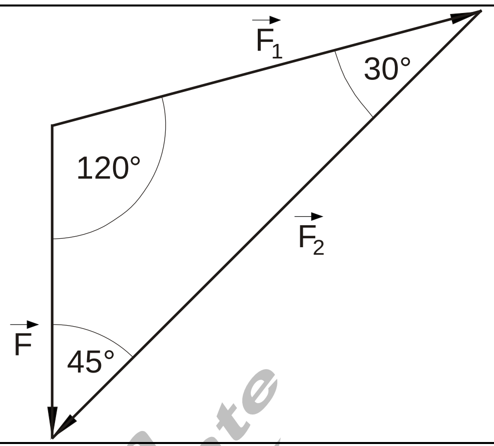
$$\left|\vec{F}\right| = F = 18\,\text{kN}$$

$$\alpha = 45^0 \quad \beta = 30^0$$

$$\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$$

$$= 180^0 - 45^0 - 30^0 = 105^0$$

Gerechnet wird mit Beträgen.



Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{F}{\sin\left(30^0\right)} = \frac{F_1}{\sin\left(45^0\right)} \Leftrightarrow F_1 = \frac{F}{\sin\left(30^0\right)} \cdot \sin\left(45^0\right) = \frac{18\,\text{kN}}{\sin\left(30^0\right)} \cdot \sin\left(45^0\right) \approx 25{,}456\,\text{kN}$$

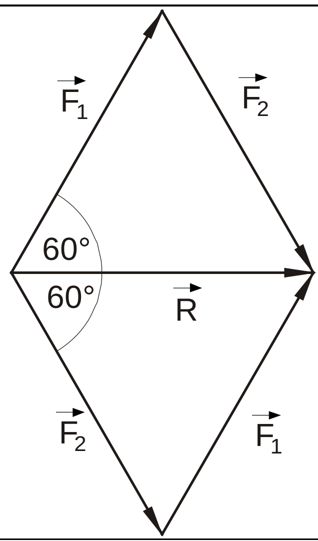
$$\frac{F}{\sin\left(30^0\right)} = \frac{F_2}{\sin\left(105^0\right)} \Leftrightarrow F_2 = \frac{F}{\sin\left(30^0\right)} \cdot \sin\left(105^0\right) = \frac{18\,\text{kN}}{\sin\left(30^0\right)} \cdot \sin\left(105^0\right) \approx 34{,}773\,\text{kN}$$

Strebe s_1 wird mit $\underline{\underline{\left|\vec{F}_1\right| = F_1 \approx 25{,}456\,\text{kN}}}$ auf Zug beansprucht.

Strebe s_2 wird mit $\underline{\underline{\left|\vec{F}_2\right| = F_2 \approx 34{,}773\,\text{kN}}}$ auf Druck beansprucht.

A3 Ausführliche Lösung

Wenn die Resultierende den gleichen Betrag haben soll, wie die beiden, an einem Punkt angreifenden Vektoren, dann muss das Vektordreieck gleichseitig sein. Das bedeutet, die Winkel im Vektordreieck sind alle 60^0. Der Winkel im Parallelogramm zwischen den beiden Vektoren beträgt dann 120^0.
Die an einem Punkt angreifenden gleichgroßen Kräfte haben einen Winkel von 120^0 miteinander.



A4 Ausführliche Lösung

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \quad \measuredangle\left(\vec{F_1},\vec{F_2}\right)$ ist $\alpha = 50^0$

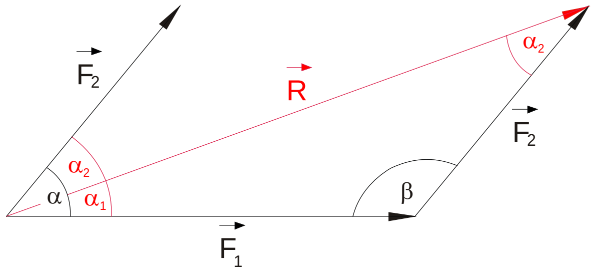
$\beta = 180^0 - 50^0 = 130^0$

Nach dem Kosinussatz gilt:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\beta)}$$

$$= \sqrt{\left(60^2 + 40^2 - 2 \cdot 60 \cdot 40 \cdot \cos\left(130^0\right)\right) N^2}$$

$$\approx \underline{\underline{91{,}024 N}}$$



Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{R}{F_2} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha_1)} \Leftrightarrow \sin(\alpha_1) = \frac{F_2}{R} \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{40}{91{,}024} \cdot \sin\left(130^0\right) \approx 0{,}337$$

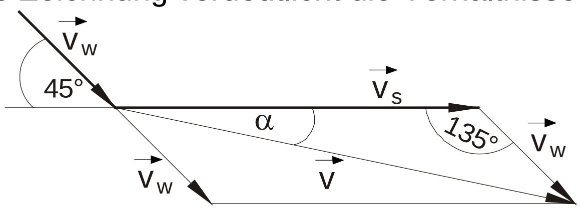
$\Rightarrow \alpha_1 = \arcsin(0{,}337) \approx \underline{\underline{19{,}672^0}}$ ist der von R und F_1 eingeschlossene Winkel.

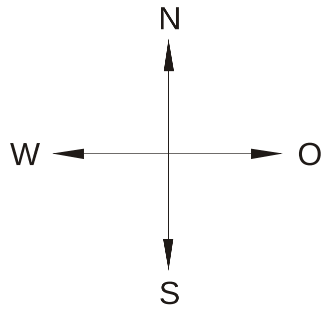
Da α_1 und α_2 sich zu $\alpha = 50^0$ ergänzen,
wird der zwischen F_2 und R liegende Winkel

$$\alpha_2 = 50^0 - \alpha_1 = 50^0 - 19{,}672^0 \approx \underline{\underline{30{,}328^0}}$$

A5 Ausführliche Lösung

Eine Zeichnung verdeutlicht die Verhältnisse





Der Betrag der Eigengeschwindigkeit des Schiffes wird mit v_s bezeichnet, die Geschwindigkeit der Wasserströmung mit v_w.
Die resultierende Geschwindigkeit sei v.
Die nebenstehende Windrose zeigt die Himmelsrichtungen auf.

Der von $\overrightarrow{v_s}$ und $\overrightarrow{v_w}$ eingeschlossene Winkel beträgt 135^0.

Mit dem Kosinussatz gilt für v:

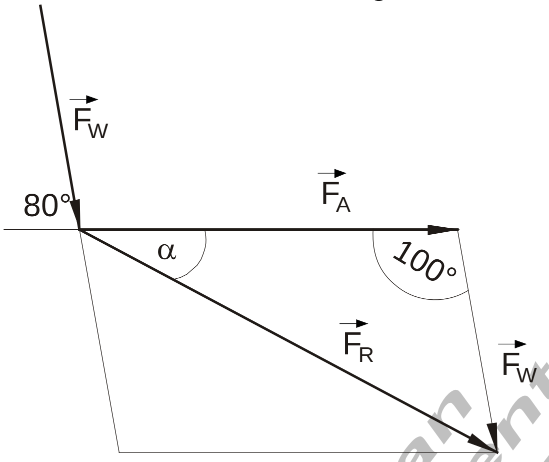
$$v = \sqrt{v_s^2 + v_w^2 - 2v_s \cdot v_w \cdot \cos\left(135^0\right)} = \sqrt{657 - 432 \cdot \cos\left(135^0\right)} \approx \sqrt{962{,}476} \approx \underline{\underline{31{,}024}}$$

Mit dem Sinussatz erhalten wir:

$$\frac{v_w}{\sin(\alpha)} = \frac{v}{\sin\left(135^0\right)} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{v_w \cdot \sin\left(135^0\right)}{v} \approx 0{,}205$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{v_w \cdot \sin\left(135^0\right)}{v}\right) \approx \underline{\underline{11{,}837^0}}$$

Die Geschwindigkeit des Schiffes über dem Meeresboden beträgt ca. 31,024 Knoten, das sind etwa 57,456 km/h.
Eine Kursabweichung in südlicher Richtung von etwa 11,837 Grad ist zu verzeichnen.

A6	Ausführliche Lösung
	Eine Zeichnung verdeutlicht die Zusammenhänge  Der Betrag der Antriebskraft des Flugzeugs wird mit F_A bezeichnet, die der Windkraft mit F_W. Die resultierende Kraft sei F_R.
	Der von $\vec{F_A}$ und $\vec{F_w}$ eingeschlossene Winkel beträgt 100^0. Mit dem Kosinussatz gilt für F_R: $F_R = \sqrt{F_A^2 + F_w^2 - 2 \cdot F_A \cdot F_w \cdot \cos\left(100^0\right)} = \sqrt{136 - 120 \cdot \cos\left(100^0\right)} \approx \sqrt{156{,}838} \approx \underline{\underline{12{,}523}}$ Mit dem Sinussatz erhalten wir: $\frac{F_w}{\sin(\alpha)} = \frac{F_R}{\sin\left(100^0\right)} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{F_w \cdot \sin\left(100^0\right)}{F_R} \approx 0{,}472$ $\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{F_w \cdot \sin\left(100^0\right)}{F_R}\right) \approx \underline{\underline{28{,}153^0}}$ Insgesamt wirkt auf das Flugzeug eine Kraft von 12,523 kN. Um zum Zielort zu gelangen, muss unter einem Winkel von $28{,}153^0$ zur eigentlichen Flugroute in Windrichtung Kurs gehalten werden.