Lösungen VBKA Ganzrationale Funktionen I
Zur Vorbereitung einer Klassenarbeit

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Was bedeutet: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$?

A1	**Ausführliche Lösung**
	f(x) stellt eine ganzrationale Funktion n – ten Grades dar. Der höchste Exponent n gibt den Grad der Funktion an. Die Faktoren $a_n ; a_{n-1} ; \ldots.. a_2 ; a_1 ; a_0$ nennt man Koeffizienten

A2	**Aufgabe**
	Was wissen Sie über die Symmetrie ganzrationaler Funktionen ?

A2	**Ausführliche Lösung**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann achsensymmetrisch, wenn die Funktionsgleichung nur aus geraden Exponenten besteht. oder wenn gilt: $f(-x) = f(x)$ z.B. $f(-2) = f(2)$ Der Graph einer ganzrationalen Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn die Funktionsgleichung nur aus ungeraden Exponenten besteht. oder wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$ z.B. $f(-3) = -f(3)$

A3	**Aufgabe**		
	Machen Sie eine Aussage über die Symmetrieeigenschaft folgender Funktionen und begründen Sie Ihre Aussage.		
a)	$f(x) = 4x^5 - 2x^3 + x$	b)	$f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2$
c)	$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$	d)	$f(x) = 4x^5 - 2x^3 + x + 1$

A3	**Ausführliche Lösung**
a)	$f(x) = 4x^5 - 2x^3 + x \Rightarrow$ Punktsymmetrie, da alle Exponenten ungerade sind
b)	$f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 2 \Rightarrow$ Achsensymmetrie, da alle Exponenten gerade sind
c)	$f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$ $\Rightarrow$ keine Symmetrie, da die Exponenten gerade und ungerade sind
d)	$f(x) = 4x^5 - 2x^3 + x + 1$ $\Rightarrow$ keine Symmetrie, da die Exponenten gerade und ungerade sind

A4	**Aufgabe**
	Wodurch wird der Verlauf einer ganzrationalen Funktion bestimmt?

A4	**Ausführliche Lösung**
	Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion wird durch den Summanden mit der höchsten Potenz bestimmt, also durch $a_n x^n$.

A5	**Aufgabe**			
	Wie verlaufen folgende Funktionsgraphen?			
	a)	$f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4$	b)	$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1$
	c)	$f(x) = 2x^5 + x^2 + 3x^2 - 1$	d)	$f(x) = -2x^2 + x + 1$

A5	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 4 \quad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$
	b)	$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \quad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - I}}$
	c)	$f(x) = 2x^5 + x^2 + 3x^2 - 1 \quad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$
	d)	$f(x) = -2x^2 + x + 1 \quad n = 2\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

A6	**Aufgabe**
	Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen ganzrationaler Funktionen?

A6	**Ausführliche Lösung**
	Eine ganzrationale Funktion n ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Ist der Grad n ungerade, so hat sie mindestens eine Nullstelle.

A7	**Aufgabe**			
	Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt von Linearfaktoren dar. Welcher Art sind die Nullstellen (einfach, doppelt oder dreifach)			
	a)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	b)	$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$

A7 Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ den Faktor x ausklammern

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ quadratische Gleichung

$$p = -6\,;\, q = 9 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} = 3$ doppelte Nullstelle

Darstellung als Produkt von Linearfaktoren:

$f(x) = x(x-3)(x-3) = x(x-3)^2$

Der Graph hat eine einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_{2/3} = 3$ (Berührungspunkt)

A7 **Ausführliche Lösung**

b)

$f(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x^2 + 8x = 0$ den Faktor x ausklammern

$\Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 4x + 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$-4x^2 + 4x + 8 = 0 \,|:(-4)$ quadratische Gleichung

Normalform der quadratischen Gleichung

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$p = -1;\, q = -2 \Rightarrow D == \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Darstellung als Produkt von Linearfaktoren:

$f(x) = x(x-2)(x+1)$

Der Graph hat drei einfache Nullstelle bei $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ und bei $x_3 = -1$

A8 **Aufgabe**

Berechnen Sie die Nullstellen folgender Funktionen. Machen Sie eine Aussage über den Verlauf des Graphen.
Wohin streben die Funktionswerte für große, bzw. kleine x – Werte?

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ $f(x) \to ?$ für $\lvert x \rvert \to \infty$	b) $f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x - 2$ $f(x) \to ?$ für $\lvert x \rvert \to \infty$

A8 **Ausführliche Lösung**

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$

1. Nullstelle über probieren:

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & -6 & 9 & -2 \\ x = 1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{-5} & \underline{4} \\ & 1 & -5 & 4 & 2 \end{array} \quad \text{keine NS für } x = 1$$

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & -6 & 9 & -2 \\ x = 2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{-8} & \underline{2} \\ & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{NS für } x_1 = 2$$

Reduzierung des Grades über Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1 \\ \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad -4x^2 + 9x \\ \quad \underline{-\left(-4x^2 + 8x\right)} \\ \qquad\qquad x - 2 \\ \qquad\quad \underline{-(x - 2)} \end{array}$$

$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad p = -4\,;\, q = 1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 2 + \sqrt{3} \\ x_3 = 2 - \sqrt{3} \end{array} \right.$

Die Nullstellen: $x_1 = 2\,;\, x_2 = 2 + \sqrt{3}\,;\, x_3 = 2 - \sqrt{3}$

Verlauf des Graphen: von III $\to$ I

Funktionswerte:

für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to -\infty$

für $x \to \infty$ geht $f(x) \to \infty$

A8 **Ausführliche Lösung**

b)

$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x - 2$ Nullstellen: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x - 2 = 0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + 2$

1. Nullstelle über probieren:

	1	3/2	−8	2	
$x = 1$	↓	1	5/2	−11/2	
	1	5/2	−11/2	−7/2	keine NS für $x = 1$
	1	3/2	−8	2	
$x = 2$	↓	2	7	−2	
	1	7/2	−1	0	NS für $x_1 = 2$

Reduzierung des Grades über Polynomdivision

$$\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + 2\right) : (x - 2) = x^2 + \frac{7}{2}x - 1$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$\frac{7}{2}x^2 - 8x$$
$$\underline{-\left(\frac{7}{2}x^2 - 7x\right)}$$
$$-x + 2$$
$$\underline{-(-x + 2)}$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0 \quad p = \frac{7}{2};\ q = -1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{49}{16} + 1 = \frac{65}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{65}{16}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{7}{4} + \sqrt{\frac{65}{16}} \\ x_3 = -\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{65}{16}} \end{array} \right.$$

Die Nullstellen: $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{7}{4} + \sqrt{\frac{65}{16}};\ x_3 = -\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{65}{16}}$

Verlauf des Graphen: von II $\rightarrow$ IV

Funktionswerte:

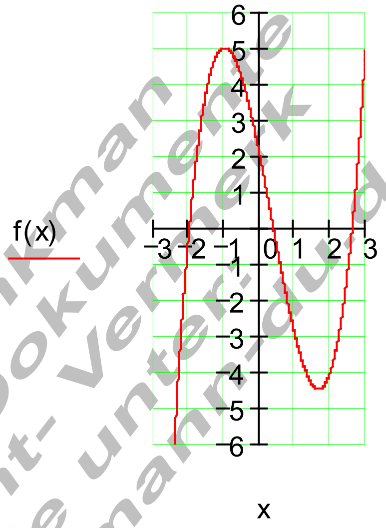
für $x \rightarrow -\infty$ geht $f(x) \rightarrow \infty$

für $x \rightarrow \infty$ geht $f(x) \rightarrow -\infty$

A9	**Aufgabe**
	Berechnen Sie für f(x) nach dem HORNER – Schema die Wertetabelle, berechnen Sie die Nullstellen und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich.
	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2{,}5 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$
	Hinweis: Schrittweite für das HORNER – Schema 0,5 $\quad x: -2{,}5\,;\,-2\,...\,2{,}5\,;\,3$

A9 Ausführliche Lösung

x =	f(x) =
-2.5	-7.375
-2	0
-1.5	3.875
-1	5
-0.5	4.125
0	2
0.5	-0.625
1	-3
1.5	-4.375
2	-4
2.5	-1.125
3	5



Nullstellen: $x_1 = -2\,;\, x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 2{,}62\,;\, x_3 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 0{,}38$

A10	**Aufgabe**	
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades geht durch die Punkte $P_1(1\|1); P_2(2\|0); P_3(-2\|4); P_4(3\|9)$	
	a)	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
	b)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	c)	Ermitteln Sie mit dem Horner – Schema die Funktionswerte für $x=-1,5\,;\,x=-0,5\,;\,x=0,5\,;\,x=1,5\,;\,x=2,5$
	d)	Tragen Sie alle bekannten Werte in eine Wertetabelle ein.
	e)	Zeichnen Sie den Graphen 1 cm = 1 Einheit. Hochpunkt $P_{max}(-1\|9)$; Tiefpunkt $P_{min}(1,7\|-0,5)$
	f)	Machen Sie eine Aussage über den Verlauf des Graphen für große und kleine x – Werte.
	g)	Machen Sie eine Symmetriebetrachtung. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

A10	**Ausführliche Lösung** (Das Gleichungssystem)	
	a)	Die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ Zunächst wird das Gleichungssystem für die gegebenen Punkte aufgestellt.

$$\begin{array}{l|lcrrrrcr} P_1(1|1): & f(1) & = & 1a_3 & +1a_2 & +1a_1 & +1a_0 & = & 1 \\ P_2(2|0): & f(2) & = & 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & +1a_0 & = & 0 \\ P_3(-2|4): & f(-2) & = & -8a_3 & +4a_2 & -2a_1 & +1a_0 & = & 4 \\ P_4(3|9): & f(3) & = & 27a_3 & +9a_2 & +3a_1 & +1a_0 & = & 9 \end{array}$$

A10 **Ausführliche Lösung** (Gauß- Algorithmus und Funktionsgleichung)

a) Lösung des Gleichungssystems mit dem Gauß – Algorithmus.

$$\begin{array}{cccc|cl}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 2 & 4 & 8 & 0 & II-I \\
1 & -2 & 4 & -8 & 4 & III-I \\
1 & 3 & 9 & 27 & 9 & IV-I \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 3 & 7 & -1 & \\
0 & -3 & 3 & -9 & 3 & |:3 \\
0 & 2 & 8 & 26 & 8 & |:2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 3 & 7 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & -3 & 1 & III+II \\
0 & 1 & 4 & 13 & 4 & IV-II \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 3 & 7 & -1 & \\
0 & 0 & 4 & 4 & 0 & |:4 \\
0 & 0 & 1 & 6 & 5 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 3 & 7 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 6 & 5 & IV-III \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 3 & 7 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 &
\end{array}$$

Bestimmen der Koeffizienten durch Rückwärtseinsetzen:

$$5a_3 = 5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

A10	**Ausführliche** Lösung

b) Achsenschnittpunkte von $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

$\underline{\underline{P_y(0\,|\,6)}}$ aus der Funktionsgleichung abgelesen

1. Nullstelle aus $P_2(2\,|\,0) \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}}$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \qquad x^2 - 5x \\ \quad \underline{-(x^2 - 2x)} \\ \qquad\quad -3x + 6 \\ \qquad\quad \underline{-(-3x + 6)} \end{array}$$

$x^2 + x - 3 = 0$

$$p = 1;\, q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + \frac{12}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \approx 1{,}303 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \approx -2{,}303 \end{array} \right.$$

Schnittpunkte mit der x − Achse:

$$P_{x1}(2\,|\,0);\, P_{x2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\, P_{x3}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

A10	**Ausführliche** Lösung

c) Ermitteln Sie mit dem Horner – Schema die Funktionswerte für
$x=-1{,}5\,;\ x=-0{,}5\,;\ x=0{,}5\,;\ x=1{,}5\,;\ x=2{,}5$

$$x=-3/2\quad \begin{array}{|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \downarrow & -3/2 & 15/4 & 15/8 \\ \hline 1 & -5/2 & -5/4 & 63/8 \end{array} = f(-1{,}5)\approx 7{,}9$$

$$x=-1/2\quad \begin{array}{|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \downarrow & -1/2 & 3/4 & 17/8 \\ \hline 1 & -3/2 & -17/4 & 65/8 \end{array} = f(-0{,}5)\approx 8{,}1$$

$$x=1/2\quad \begin{array}{|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \downarrow & 1/2 & -1/4 & -21/8 \\ \hline 1 & -1/2 & -21/4 & 27/8 \end{array} = f(0{,}5)\approx 3{,}4$$

$$x=3/2\quad \begin{array}{|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \downarrow & 3/2 & 3/4 & -51/8 \\ \hline 1 & 1/2 & -17/4 & -3/8 \end{array} = f(1{,}5)\approx -0{,}4$$

$$x=5/2\quad \begin{array}{|cccc} 1 & -1 & -5 & 6 \\ \downarrow & 5/2 & 15/4 & 25/8 \\ \hline 1 & 3/2 & -5/4 & 23/8 \end{array} = f(2{,}5)\approx 2{,}9$$

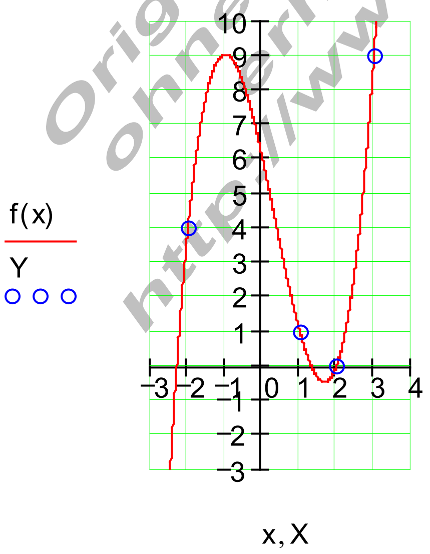
A10	**Ausführliche** Lösung

d)

x	–2,3	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,3	1,5	1,7	2	2,5
f(x)	0	4	7,9	9	8,1	6	3,4	1	0	–0,4	–0,5	0	2,9
	P_{x3}	P_3		P_{max}		P_y		P_1	P_{x2}		P_{min}	P_{x1}	

A10	**Ausführliche** Lösung

e)



f) Der Graph verläuft von III nach I

g) Keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen.

Hochpunkt $P_{Max}\left(-1\,|\,9\right)$

Tiefpunkt $P_{Min}\left(1{,}7\,|\,-0{,}5\right)$