Lösungen Training ganzrationale Funktionen IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$P_{x1}(3\mid 0);P_{x2}(-3\mid 0);P_{x3}(2\mid 0);P_{x4}(-2\mid 0)$ Substitution $x^2=z$ $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18=\frac{1}{2}(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

E2	Ergebnis
	$P_{x1}(2\mid 0);P_{x2}(3\mid 0);P_{x3}(-1\mid 0)$ Nullstelle geraten $x_1=2$ $f(x)=x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x-3)(x+1)$

E3	Ergebnis
	$P_{x1}(2\mid 0);P_{x2}(-1\mid 0)$ Lösung mit $p-q-$Formel $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}(x-2)(x+1)$

E4	Ergebnis
	$P_{x1}(4\mid 0);P_{x2}(-4\mid 0);P_{x3}(3\mid 0);P_{x4}(-3\mid 0)$ Substitution $x^2=z$ $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216=-\frac{3}{2}(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)$

E5	Ergebnis
	$P_{x1}(2\mid 0);P_{x2}(3\mid 0);P_{x3}(-1\mid 0)$ Nullstelle geraten $x_1=2$ $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3=-\frac{1}{4}(x-3)(x+1)(x+4)$

E6	Ergebnis
	$P_{x1}(0\mid 0);P_{x2}(1\mid 0);P_{x3}(-3\mid 0)$ x ausgeklammert $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x=-\frac{3}{4}x(x-1)(x+3)$

E7	Ergebnis
	$P_{x1}(1\mid 0);P_{x2}(-1\mid 0)$ Substitution $x^2=z$ $\quad f(x)=3x^4-3$ Darstellung durch Linearfaktor nicht möglich.

E8	Ergebnis
	$P_{x1}(1\mid 0);P_{x2}(-2\mid 0);P_{x3}(-3\mid 0)$ Nullstelle geraten $x_1=1$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{3}(x-1)(x+2)(x+3)$

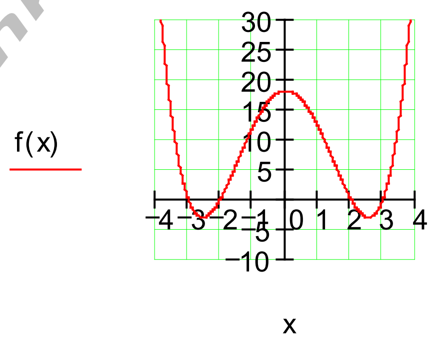
E9	Ergebnis
	$P_{x1}(0\,\vert\,0);P_{x2}(4\,\vert\,0);P_{x3}(-2\,\vert\,0)$ x ausgeklammert $f(x)=2x^3-4x^2-16x=2x(x-4)(x+2)$

E10	Ergebnis
	$P_{x1}(1\vert\,0);P_{x2}(2\,\vert\,0);P_{x3}(-5\,\vert\,0)$ Nullstelle geraten $x_1=1$ $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20=2(x-1)(x-2)(x+5)$

Ausführliche Lösungen:

Die hier behandelten ganzrationalen Funktionen sind so beschaffen, dass folgende Lösungsverfahren angewendet werden können.	
1.	Durch ausklammern von x und anwenden des Satzes vom Nullprodukt ist eine quadratische Gleichung zu lösen.
2.	Eine biquadratische Gleichung lässt sich durch Substitution in eine quadratische Gleichung verwandeln.
3.	Eine Nullstelle ist durch probieren zu finden. Danach kann durch Polynomdivision der Grad der Gleichung reduziert werden, so dass eine quadratische Gleichung entsteht (Restpolynom). Vorteilhaft bei diesem Verfahren ist die Anwendung des Horner- Schemas um durch probieren die erste Nullstelle zu finden. Das Restpolynom kann dann auch ohne Polynomdivision gefunden werden.
Ergebnisse der Polynomdivision bzw. der quadratischen Gleichungen werden nachfolgend ohne ausführlichen Lösungsweg dargestellt.	

A1	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18 = 0 \quad x^2 = z$ $\frac{1}{2}z^2 - \frac{13}{2}x + 18 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 13z + 36 = 0$ $z_1 = 9\,;\, z_2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3\,;\, x_{3/4} = \pm 2$ $P_{x1}(3 \mid 0)\,;\, P_{x2}(-3 \mid 0)$ $P_{x3}(2 \mid 0)\,;\, P_{x4}(-2 \mid 0)$ $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$	

A2	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

A2 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Nullstelle raten $x_1 = 2$

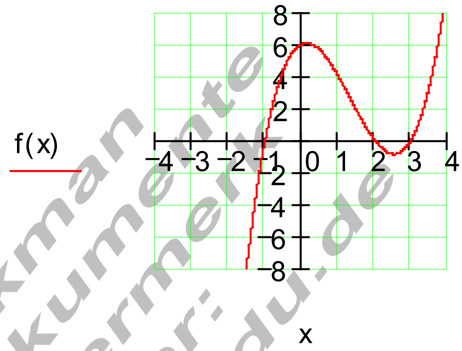
$\left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$

$p = -2\,;\, q = -3 \Rightarrow D = 4$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{array}{l} x_2 = 1 + 2 = 3 \\ x_3 = 1 - 2 = -1 \end{array}\right.$

$P_{x1}(2\,|\,0)\,;\,P_{x2}(3\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-1\,|\,0)$

$f(x) = (x-2)(x-3)(x+1)$



A3	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

A3 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

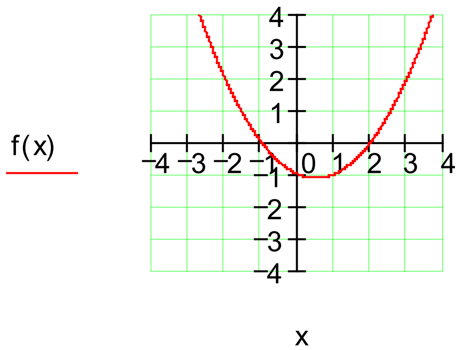
$x^2 - x - 2 = 0$

$p = -1\,;\, q = -2 \Rightarrow D = \frac{9}{4}$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{array}\right.$

$P_{x1}(2\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-1\,|\,0)$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+1)$



A4	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216$

A4	**Ausführliche Lösung**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216 = 0$$

$$x^2 = z \Rightarrow -\frac{3}{2}z^2 + \frac{75}{2}z - 216 = 0$$

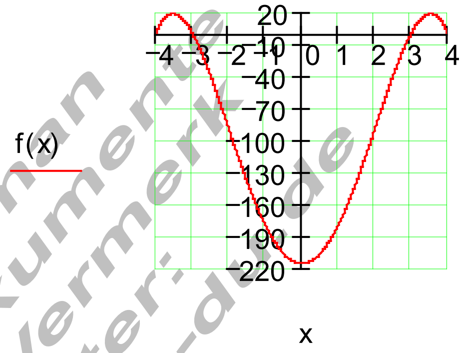
$$\Leftrightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$$

$$z_1 = 16\,;\, z_2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4\,;\, x_{3/4} = \pm 3$$

$$P_{x1}(4\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-4\,|\,0)$$

$$P_{x3}(3\,|\,0)\,;\,P_{x4}(-3\,|\,0)$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}(x-4)(x+4)(x-3)(x+3)$$



A5	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$

A5 Ausführliche Lösung

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3=0$$

Nullstelle raten $x_1=3$

$$\left(-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3\right):(x-3)$$

$$=-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x-1$$

$$x^2+5x+4=0$$

$$p=5\,;\,q=4 \Rightarrow D=\frac{9}{4}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1 \\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-4 \end{array} \right.$$

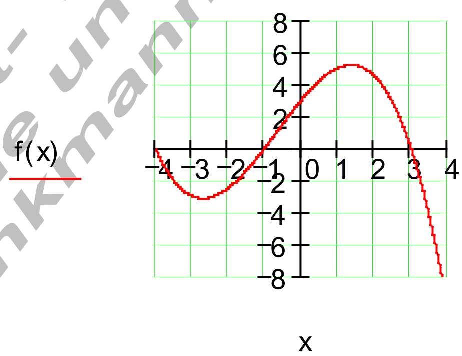
$P_{x1}(3\,|\,0)\,;P_{x2}(-1\,|\,0)\,;P_{x3}(-4\,|\,0)$

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x-3)(x+1)(x+4)$$

Lösung mit dem Horner- Schema

$$\begin{array}{ccccc} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{11}{4} & 3 \\ x=3 & \downarrow & -\frac{3}{4} & -\frac{15}{4} & -3 \\ \hline & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -1 & 0 \quad =f(3) \end{array}$$

$-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x-1=0$ Restpolynom



A6 Aufgabe

Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$$

A6 Ausführliche Lösung

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x = 0$$

x ausklammern:

$$x\left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

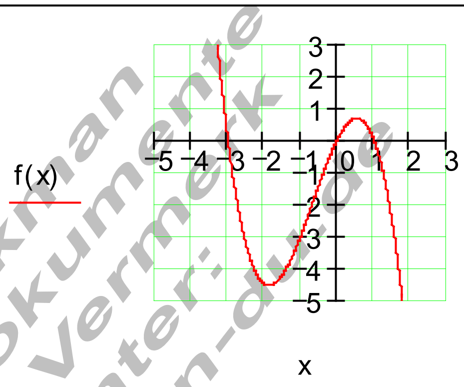
$$-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$p = 2\,;\, q = -3 \Rightarrow D = 4$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -1 + 2 = 1 \\ x_3 = -1 - 2 = -3 \end{array}\right.$$

$$P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}(1\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-3\,|\,0)$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x(x-1)(x+3)$$



A7 Aufgabe

Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.

$$f(x) = 3x^4 - 3$$

A7 Ausführliche Lösung

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 3 = 0$$

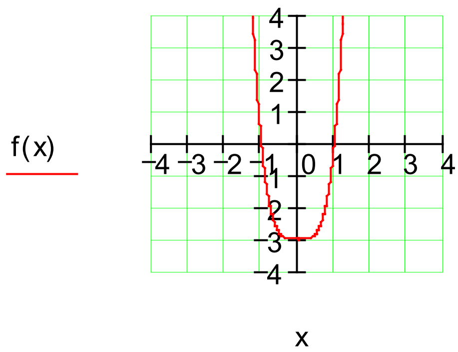
$$x^2 = z$$

$$3z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 1 = 0$$

$$z_1 = 1\,;\, z_2 = -1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

$$P_{x1}(1\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-1\,|\,0)$$

Darstellung durch Linearfaktor nicht möglich.



A8	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

A8 Ausführliche Lösung

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$$

Nullstelle raten $x_1=1$

$$\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2\right):(x-1)$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$p=5;\ q=6 \Rightarrow D=\frac{1}{4}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\ \begin{array}{l} x_2=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2 \\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3 \end{array}\right.$$

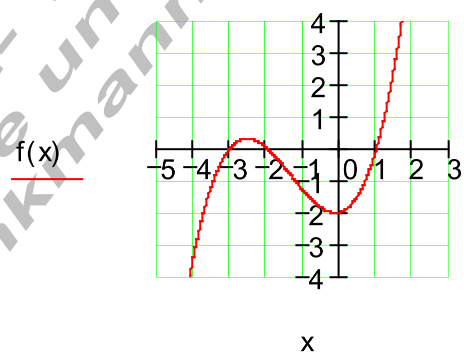
$P_{x1}(1|0);P_{x2}(-2|0);P_{x3}(-3|0)$

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x+2)(x+3)$$

Lösung mit dem Horner- Schema

$$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ x=1 & \downarrow & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 2 & 0=f(1) \end{array}$$

$\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2=0$ Restpolynom



A9	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 16x$

A9 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 - 16x = 0$

x ausklammern:

$x\left(2x^2 - 4x - 16\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

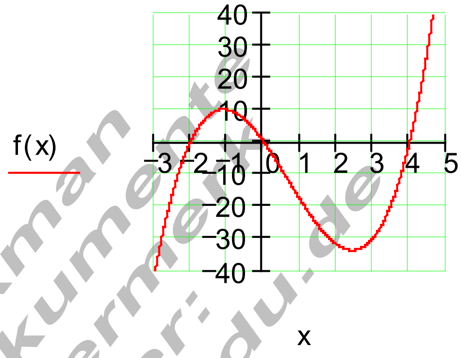
$2x^2 - 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$p = -2\,;\, q = -8 \Rightarrow D = 9$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_2 = 1 + 3 = 4 \\ x_3 = 1 - 3 = -2 \end{array}\right.$

$P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}(4\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-2\,|\,0)$

$f(x) = 2x(x-4)(x+2)$



A10	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie mit einem Ihnen geeignetem Verfahren die Nullstellen der ganzrationaler Funktion. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x – Achse und stellen Sie die Funktionsgleichung als Produkt aus Linearfaktoren dar.	$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20$

A10 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20 = 0$

Nullstelle raten $x_1 = 1$

$\left(2x^3 + 4x^2 - 26x + 20\right) : (x-1)$

$= 2x^2 + 6x - 20$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$p = 3\,;\, q = -10 \Rightarrow D = \frac{49}{4}$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2 \\ x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5 \end{array}\right.$

$P_{x1}(1\,|\,0)\,;\,P_{x2}(2\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-5\,|\,0)$

$f(x) = 2(x-1)(x-2)(x+5)$

Lösung mit dem Horner- Schema

	2	4	−26	20	
x = 1	↓	$\underline{2}$	$\underline{6}$	$\underline{-20}$	
	2	6	−20	0	= f(1)

$2x^2 + 6x - 20 = 0$ Restpolynom