Beispiel I Training ganzrationale Funktionen IV

Ausführliche Beispiele zur Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen:

Faktorisierungsverfahren

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ der Faktor x kann ausgeklammert werden

$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und der Klammerausdruck ist Null

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, :2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$p = -1;\, q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Die Nullstellen:

$x_1 = 0;\, x_2 = 2;\, x_3 = -1$

Schnittpunkte mit der $x-$Achse:

$P_{x_1}(0\,|\,0);\, P_{x_2}(2\,|\,0);\, P_{x_3}(-1\,|\,0)$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

Das Faktorisierungsverfahren lässt sich immer dann anwenden, wenn die Variable x oder eine Potenz davon aus dem Funktionsterm ausgeklammert werden kann.

Substitutionsverfahren

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ biquadratische Gleichung

Substitution: $x^2 = z$

$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

Substitution rückgängig machen:

$x^2 = z_1 = 9$	$x^2 = z_2 = 4$
$\Rightarrow \lvert x \rvert = 9$	$\lvert x \rvert = 4$
$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3$	$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$

Schnittpunkte mit der x – Achse:

$P_{x1}(3 \mid 0); P_{x2}(-3 \mid 0); P_{x3}(2 \mid 0); P_{x4}(-2 \mid 0)$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Ist der Funktionsterm eine biquadratische Gleichung, dann lässt sich das Substitutionsverfahren anwenden.

Reduzierung des Grades durch Polynomdivision

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$

$x_1 = 2$ ist eine bekannte Nullstelle, es erfolgt die Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\qquad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad\quad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}
$$

Ansatz für die Nullstellenbestimmung: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x-2) = 0$

Es ist also die quadratische Gleichung $x^2 + x - 3 = 0$ zu lösen.
Das geschieht mit der $p-q-$Formel:

$$p = 1;\, q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

Die Nullstellen:

$$x_1 = 2;\, x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\, x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

Schnittpunkte mit der $x-$Achse:

$$P_{x1}(2 \,|\, 0);\, P_{x2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \,\middle|\, 0\right);\, P_{x3}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \,\middle|\, 0\right)$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = (x-2)\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\right) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

Reduzierung des Grades mittels Horner- Schema

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 \quad x_1 = 2$ sei eine durch Probieren gefundene Nullstelle.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & -1 & -5 & 6 \\
x = 2 & \downarrow & & \underline{2} & \underline{2} & -6 \\
 & & 1 & 1 & -3 & 0 \quad = f(2)
\end{array}
$$

$x^2 + x - 3 = 0$ ist das Restpolynom.
Die Lösung des Restpolynoms führt zur gleichen Lösung wie bei der Polynomdivision.