

Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen III

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe	
	Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.	
	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.	

A1	Ausführliche Lösung
	<p>Verschiebung um 1 LE nach oben ergibt 3 Nullstellen. $f^*(x) = f(x) + 1$ hat $P_{x1/2}(-2 0)$; $P_{x3}(1 0)$ und $P_y(0 -4)$ $\Rightarrow f^*(x) = a_3(x+2)^2(x-1)$ $P(0 -4) : f^*(0) = a_3 \cdot 4 \cdot (-1) = -4 \Leftrightarrow a_3 = 1$ $f^*(x) = (x+2)^2(x-1) \Rightarrow f(x) = f^*(x) - 1$ $\Rightarrow f(x) = (x+2)^2(x-1) - 1 = \underline{\underline{x^3 + 3x^2 - 5}}$</p> <p>Eine weitaus aufwendigere Methode wäre es gewesen, mit den Koordinaten von 4 aus dem Graphen abgelesenen Punkten ein Gleichungssystem aufzustellen und dieses mit dem Gauß- Algorithmus zu lösen.</p>

A2	<p>Aufgabe</p> <p>Die Abbildung zeigt zwei Graphen ganzrationaler Funktionen 4. Grades.</p> <p>Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm.</p>	
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

A2	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>$f(x)$ hat bei $x_1 = -1$ eine dreifache Nullstelle (Sattelpunkt) und bei $x_2 = 2$ eine einfache Nullstelle. Außerdem verläuft der Graph durch $P(1 -2)$.</p> <p>Ansatz : $f(x) = a_4 (x+1)^3 (x-2)$</p> <p>$P(1 -2) : f(1) = -2 \Leftrightarrow a_4 (1+1)^3 (1-2) = -2 \Leftrightarrow a_4 \cdot 8 \cdot (-1) = -2$</p> <p>$\Leftrightarrow -8a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$</p> <p>$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} (x+1)^3 (x-2) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{4} x^2 - \frac{5}{4} x - \frac{1}{2}$</p> <p>$g(x)$ hat 4 Nullstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ und schneidet die y - Achse bei $y = -2$</p> <p>Ansatz : $g(x) = a_4 (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$</p> <p>$y = -2 \Rightarrow g(0) = a_4 (2)(1)(-1)(-2) = -2 \Leftrightarrow 4a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$</p> <p>$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = -\frac{1}{2} (x^2-4)(x^2-1) = -\frac{1}{2} x^4 + \frac{5}{2} x^2 - 2$</p>
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A3	Aufgabe	
	$f(x) = a_4x^4 + a_1x + a_0$ Bestimmen Sie a_4 ; a_1 und a_0 Bestimmen Sie die positive Nullstelle.	

A3	Ausführliche Lösung	
	$a_0 = -2$ wird aus dem Graphen abgelesen $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_1x - 2$ $P_1(-1 0): f(-1) = a_4 - a_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_1 + 2$ $P_2(1 -2): f(1) = a_4 + a_1 - 2 = -2 \Leftrightarrow a_4 = -a_1 + 2 - 2 \Leftrightarrow a_4 = -a_1$ durch gleichsetzen von $a_4: a_1 + 2 = -a_1 \Leftrightarrow a_1 = -1$ aus $a_4 = -a_1 \Rightarrow a_4 = 1$ $\Rightarrow f(x) = x^4 - x - 2$ Nullstellenbestimmung durch Einschachtelung: $f(1,3) \approx -0,444$; $f(1,4) \approx 0,442$; $f(1,35) \approx -0,028$; $f(1,36) \approx 0,061$ $f(1,355) \approx 0,016$; $f(1,353) \approx -0,002$ gute Näherung Die Nullstelle liegt etwa bei $x = 1,353$	

A4	Aufgabe	
	$f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 - \frac{7}{4}$ <p>schneidet die Gerade $g(x)$ in zwei Punkten. Bestimmen Sie a_4 ; a_2 und $g(x)$</p>	

A4	Ausführliche Lösung																					
	<p>Die Schnittpunkte mit der Geraden werden aus der Grafik abgelesen. Ebenso der Schnittpunkt der Geraden mit der y – Achse. $P_1(-1 -3)$; $P_2(3 5)$; $P_y(0 -1) \Rightarrow a_{0g} = -1$</p> <p>Steigung: $a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = 2x - 1}}$</p>																					
	<p>Punktprobe für $f(x)$ ergibt:</p> <p>$P_1(-1 -3): f(-1) = 1a_4 + 1a_2 - \frac{7}{4} = -3 \Rightarrow a_4 + a_2 = -\frac{5}{4}$</p> <p>$P_2(3 5): f(3) = 81a_4 + 9a_2 - \frac{7}{4} = 5 \Rightarrow 81a_4 + 9a_2 = \frac{27}{4}$</p>	<p>Gleichungssystem:</p> $\begin{array}{r} -72a_2 = \frac{423}{4} \\ \Leftrightarrow a_2 = -\frac{432}{4 \cdot 72} = -\frac{3}{2} \\ a_4 + a_2 = -\frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow a_4 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \\ \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}}} \end{array}$																				
	<table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">a_4</td> <td>a_2</td> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td>1</td> <td style="border-right: 1px solid black;">$-\frac{5}{4}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">81</td> <td>9</td> <td style="border-right: 1px solid black;">$\frac{27}{4}$</td> <td>$\parallel -81 \cdot I$</td> </tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"> <td style="border-right: 1px solid black;">1</td> <td>1</td> <td style="border-right: 1px solid black;">$-\frac{5}{4}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">0</td> <td>-72</td> <td style="border-right: 1px solid black;">$\frac{432}{4}$</td> <td></td> </tr> </table>	a_4	a_2			1	1	$-\frac{5}{4}$		81	9	$\frac{27}{4}$	$\parallel -81 \cdot I$	1	1	$-\frac{5}{4}$		0	-72	$\frac{432}{4}$		
a_4	a_2																					
1	1	$-\frac{5}{4}$																				
81	9	$\frac{27}{4}$	$\parallel -81 \cdot I$																			
1	1	$-\frac{5}{4}$																				
0	-72	$\frac{432}{4}$																				