Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen II

Ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Der Punkt P(0 | f(0)) liegt auf dem Graphen der Funktion f(x).
Durch Spiegelung an W(1 | 1,5) geht P in den Punkt Q über.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q und zeigen Sie, dass Q auf dem Graphen von f(x) liegt. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis?

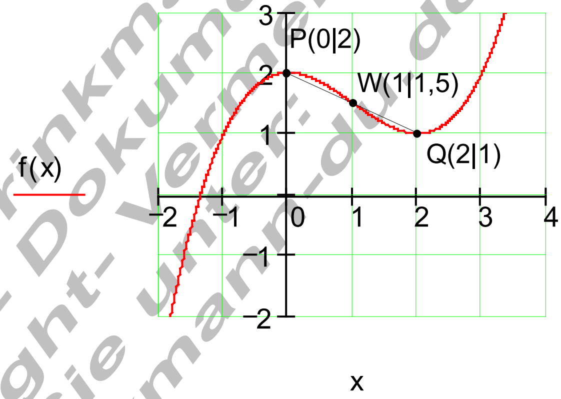
$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+2\,;D=\mathbb{R}$$

A1 Ausführliche Lösung

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+2$$

x	−1	0	1	2	3
f(x)	1	2	1,5	1	2

Die Koordinate von Q wird graphisch ermittelt. Sie lässt sich aus dem Koordinatensystem zu Q(2 | 1) ablesen.
Ein Blick auf die Wertetabelle bestätigt, dass Q auf dem Graphen liegt. Das Ergebnis bedeutet:
Der Graph von f(x) ist punktsymmetrisch zum Punkt W



A2 Aufgabe

Wodurch unterscheiden sich die Graphen von f(x), g(x) und h(x) ?

$$f(x)=x(x-4)^2 \quad g(x)=0,25x^3-2x^2+4x \quad h(x)=0,25\left(x^3-8x^2+16x+1\right)$$

A2 Ausführliche Lösung

$$f(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$$

$$g(x)=0,25x^3-2x^2+4x=0,25\cdot f(x)$$

$$h(x)=0,25\left(x^3-8x^2+16x+1\right)=\underbrace{0,25x^3-2x^2+4x}_{g(x)}+0,25=g(x)+0,25$$

g(x) entsteht aus f(x) durch Stauchung in y – Richtung um den Faktor 0,25.
h(x) entsteht aus g(x) durch Verschiebung in y – Richtung um 0,25 LE.

A3 Aufgabe

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung. Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten des Funktionsterms erfüllen, damit der Graph drei Schnittpunkte mit der x – Achse hat?
Gibt es eine solche Funktion auch mit zwei Nullstellen?

A3 Ausführliche Lösung

Punktsymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_3x^3 + a_1x = x\left(a_3x^2 + a_1\right) \Rightarrow P_{x1}(0\,|\,0)$

$$a_3x^2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{a_1}{a_3} \Rightarrow |x| = \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}} \text{ mit } -\frac{a_1}{a_3} > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{a_1}{a_3} < 0}}$$

Die Vorzeichen von a_3 und a_1 müssen unterschiedlich sein.
Eine solche Funktion mit zwei Nullstellen kann es nicht geben, da bei einer Symmetrie zum Ursprung (Punktsymmetrie) auch die Nullstellen symmetrisch zum Ursprung wären. Das wären dann insgesamt drei Nullstellen.

A4 Aufgabe

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte P_1 und P_2 und berührt die x – Achse im Ursprung. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
Wie entsteht f(x) aus dem Graphen der Funktion g(x)?
Daten:

$P_1(2\,|\,0)\,;\,P_2(1\,|\,-5)\,;\,g(x) = 5x(x+2)^2\,,\,x \in \mathbb{R}$

A4 Ausführliche Lösung

Berührungspunkt $P_{x1/2}(0\,|\,0)$

ist doppelte Nullstelle, $P_1(2\,|\,0) = P_{x3}(2\,|\,0)$

ist die 3. Nullstelle.

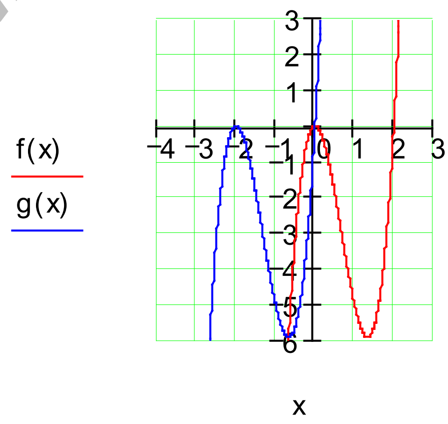
Ansatz: $f(x) = a_3x^2(x-2)$

$P_2(1\,|\,-5): f(1) = a_3 \cdot 1 \cdot (-1) = -5 \Leftrightarrow a_3 = 5$

$\Rightarrow f(x) = 5x^2(x-2) = \underline{\underline{5x^3 - 10x^2}}$

f(x) entsteht durch Verschiebung von g(x) um 2 LE nach rechts $x \to x-2$

$f(x) = g(x-2) = 5(x-2)x^2 = 5x^2(x-2)$



A5	**Aufgabe**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades hat in $P_{x1}(-2 \mid 0)$ einen Sattelpunkt und verläuft durch P(-4 | 6). Bestimmen Sie den Funktionsterm und zeichnen Sie den Graphen.

A5 Ausführliche Lösung

$P_{x1}(-2 \mid 0)$ als Sattelpunkt bedeutet

$P_{x1/2/3}(-2 \mid 0)$ ist dreifache Nullstelle.

Ansatz: $f(x) = a_3\,(x+2)^3$

$P(-4 \mid 6): f(-4) = a_3\,(-2)^3 = 6$

$$\Leftrightarrow a_3 = -\frac{3}{4}$$

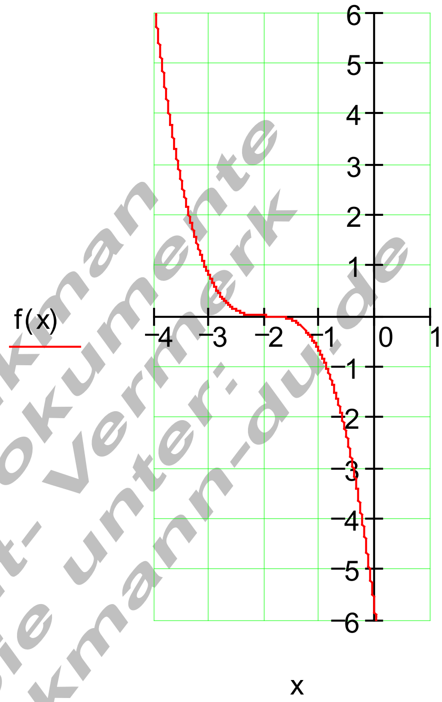
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}(x+2)^3$$

$$= -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 6$$

$f(-3) = -0,75 \cdot (-1)^3 = 0,75$

$f(-1) = -0,75 \cdot 1^3 = -0,75$

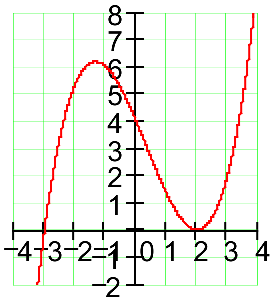
x	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	6	0,75	0	$-0,75$	-6



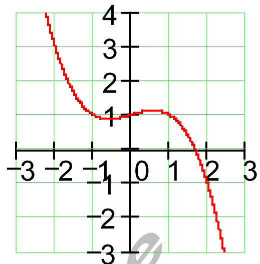
A6 Aufgabe

Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a)



b)



A6 Ausführliche Lösung

a) Nullstellen: $P_{x1}(-3\,|\,0)\,;P_{x2/3}(2\,|\,0)$ $\quad P_y(0\,|\,4)$

Ansatz: $f(x)=a_3(x+3)(x-2)^2$

$P_y(0\,|\,4): f(0)=a_3\cdot 3\cdot(-2)^2=4 \Leftrightarrow 12a_3=4 \Leftrightarrow a_3=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x+3)(x-2)^2=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+4$

A6 Ausführliche Lösung

b) Verschiebung um 1 LE nach unten ergibt Punktsymmetrie und 3 Nullstellen.

$f^*(x)=f(x)-1=a_3x(x+1)(x-1)$

$P(2\,|-2): f^*(2)=2a_3\cdot 3\cdot 1=-2 \Leftrightarrow a_3=-\frac{1}{3}$

$f^*(x)=-\frac{1}{3}x(x+1)(x-1)\Rightarrow f(x)=f^*(x)+1$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x(x+1)(x-1)+1=\underline{\underline{-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x+1}}$

Eine weitaus aufwendigere Methode wäre es gewesen, mit den Koordinaten von 4 aus dem Graphen abgelesenen Punkten ein Gleichungssystem aufzustellen und dieses mit dem Gauß- Algorithmus zu lösen.

A7	**Aufgabe**
	Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + cx + d$ schneidet die Gerade $g(x) = -3(x-3)$ auf der $y-$Achse und in $x = -4$. Bestimmen Sie $f(x)$.

A7	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + cx + d\,;\, g(x) = -3(x-3) = -3x + 9$
	g(x) und f(x) schneiden die $y-$Achse in $P_y(0\,\vert\,9) \Rightarrow d = 9$
	Ein weiterer Schnittpunkt von g(x) mit f(x) ist bei $x = -4$
	$g(-4) = -3\cdot(-4) + 9 = 21 \Rightarrow P(-4\,\vert\,21)$ liegt auf dem Graphen von f(x).
	$P(-4\,\vert\,21): f(-4) = -\frac{1}{4}(-4)^3 - 4c + 9 = 21 \Leftrightarrow c = 1$
	$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x + 9$

A8	**Aufgabe**	
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch und schneidet die x – Achse in x = 3.	
	a)	Welche Beziehung besteht zwischen den Koeffizienten?
	b)	Bestimmen Sie einen Funktionsterm wenn $P\left(2\,\middle\vert\,\frac{32}{9}\right)$ auf dem Graphen liegt.

A8	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Punktsymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_3x^3 + a_1x$
		$P_x(3\,\vert\,0): f(3) = 27a_3 + 3a_1 = 0 \Leftrightarrow 27a_3 + 3a_1 = 0$
		$\Leftrightarrow 9a_3 = -a_1$ oder $a_1 = -9a_3$

A8	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(2) = 8a_3 + 2a_1 = \frac{32}{9}$ mit $a_1 = -9a_3$ folgt
		$8a_3 + 2(-9a_3) = \frac{32}{9} \Leftrightarrow a_3 = -\frac{16}{45}$ mit $a_1 = -9a_3$ folgt
		$a_1 = -9\left(-\frac{16}{45}\right) = \frac{16}{5}$
		$f(x) = -\frac{16}{45}x^3 + \frac{16}{5}$