Lösungen Achsenschnittpunkte und Graphen ganzrationaler Funktionen II

Nullstellen berechnen und Graphen zeichnen

Ausführliche Lösungen:

A1a	**Aufgabe**
	Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung. Skizzieren Sie den Graphen, wenn dieser durch die Punkte $P_1(1\,|\,2)$ und $P_2(3\,|\,-2)$ verläuft.

A1 Ausführliche Lösung

a) Symmetrie zum Ursprung bedeutet Punktsymmetrie.

$f(-x) = -f(x)$

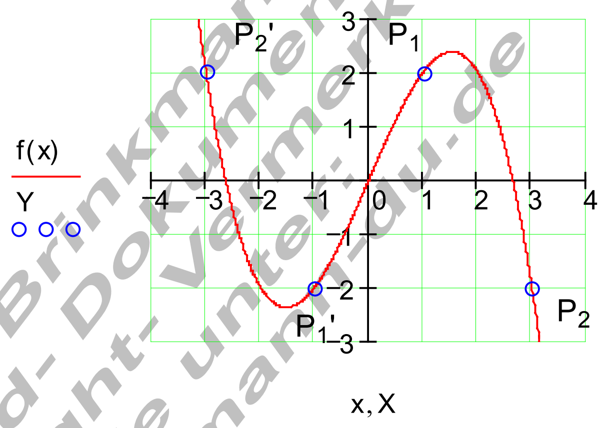
$P_1(1\,|\,2): f(-1) = -f(1) = -2$

$\Rightarrow P_1'(-1\,|\,-2)$

$P_2(3\,|\,-2): f(-3) = -f(3) = 2$

$\Rightarrow P_2'(-3\,|\,2)$

Mit diesen 4 Punkten lässt sich der Graph skizzieren.



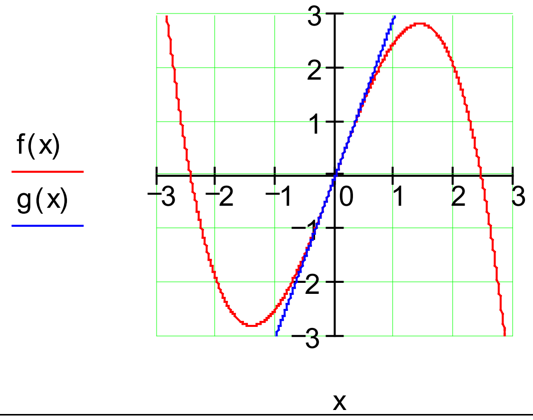
A1b	**Aufgabe**
	Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist symmetrisch zum Ursprung. Skizzieren Sie den Graphen, wenn dieser die Gerade g mit g(x) = 3x die Parabel in $P(0\,|\,0)$ berührt.

A1 Ausführliche Lösung

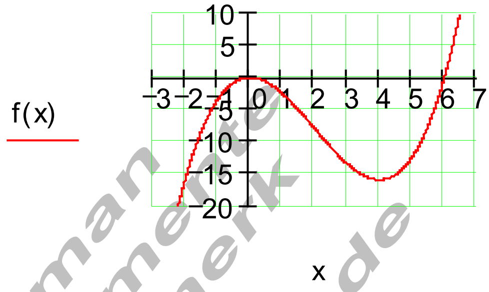
b) Der Graph ist punktsymmetrisch. Die Steigung des Graphen im Nullpunkt ist gleich der Steigung der Geraden g(x) = 3x.

Der Graph durchläuft die Quadranten in der Reihenfolge

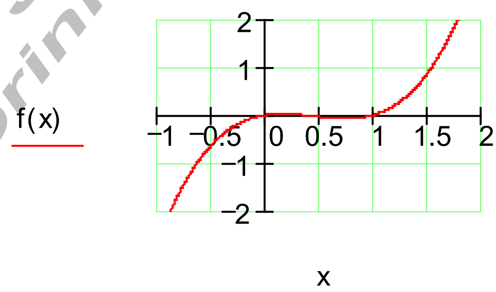
II – III – I – IV



A2a	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$

A2	**Ausführliche Lösung**		
	a)	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2 \Rightarrow$ keine Symmetrie $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0$ $\Rightarrow x_{1/2}=0\,;\,x_3=6$ $P_{x1/2}(0\,\vert\,0)$ Berührungspunkt $P_{x3}(6\,\vert\,0)$ Verlauf: III – IV – I	

A2b	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

A2	**Ausführliche Lösung**		
	b)	$f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$ $\Rightarrow$ keine Symmetrie $f(x)=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=\frac{1}{3}\,;\,x_3=1$ $P_x(0\,\vert\,0);P_{x2}\left(\frac{1}{3}\,\vert\,0\right);P_{x3}(1\vert 0)$ Verlauf: III – I – IV – I	

A2c	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$

A2 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie

1. Nullstelle durch probieren:

$$f(-2)=-\frac{8}{4}-\frac{12}{4}+5=0$$

$$\Rightarrow x_1=-2$$

Polynomdivision:

$$\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5\right):(x+1)$$

$$=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{10}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{10}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(x+2)\left(x^2-5x+10\right)$$

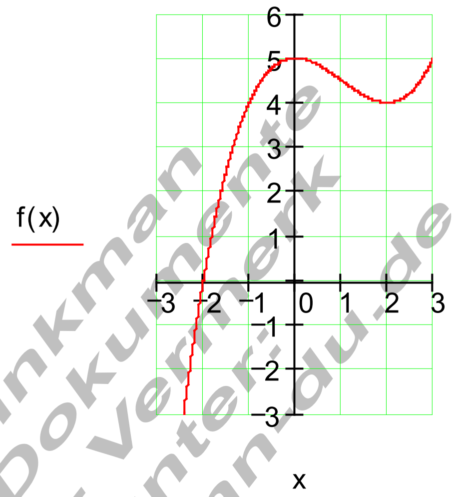
$$x^2-5x+10=0$$

$$\Rightarrow p=-5\,;\,q=10$$

$$\Rightarrow D=6{,}25-10<0$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow$ keine weitere Nullstelle



Verlauf: III – II – I

A2d	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

A2 Ausführliche Lösung

d)

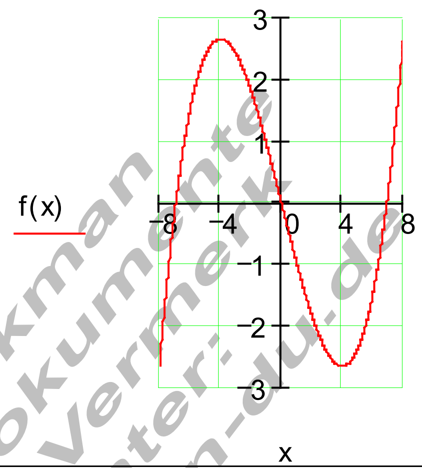
$f(x)=\frac{1}{48}x^3-x \Rightarrow$ Punktsymmetrie

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{48}x^2-1\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=\sqrt{48}\,;\,x_3=-\sqrt{48}$

$P_x(0\,|\,0)\,;P_{x2}\left(\sqrt{48}\,|\,0\right);P_{x3}\left(-\sqrt{48}\,|\,0\right)$

Verlauf: III – II – IV – I



A2e	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$

A2 Ausführliche Lösung

e)

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \Rightarrow$ keine Symmetrie

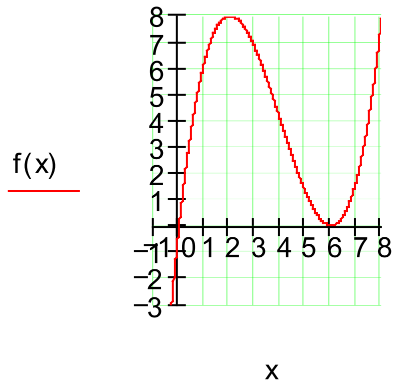
$f(x)=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x^2-3x+9\right)=0 \Rightarrow x_1=0$

$\frac{1}{4}x^2-3x+9=0 \Leftrightarrow x^2-12x+36=0$

$\Rightarrow p=-12\,;\,q=36 \Rightarrow D=0 \Rightarrow x_{2/3}=6$

$P_{x1}(0\,|\,0)\,;P_{x2/3}(6\,|\,0)$ Berührungspunkt

Verlauf: III – I



A2f	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

A2 Ausführliche Lösung

f)

$$f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$$

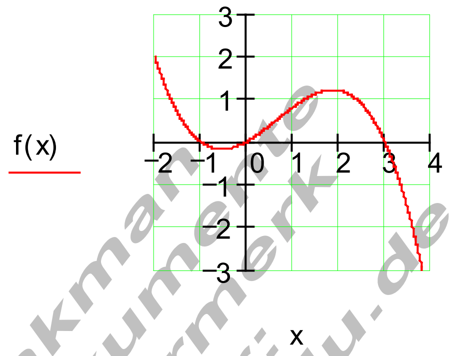
$$=-\frac{1}{5}x^3+\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{5}x$$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie

$x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=3$

$P_{x1}(-1\,|\,0);\ P_{x2}(0\,|\,0);\ P_{x3}(3\,|\,0)$

Verlauf: II – III – I – IV



A2g	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$

A2 Ausführliche Lösung

g)

$$f(x)=\frac{1}{5}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$$

$$=-\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$$

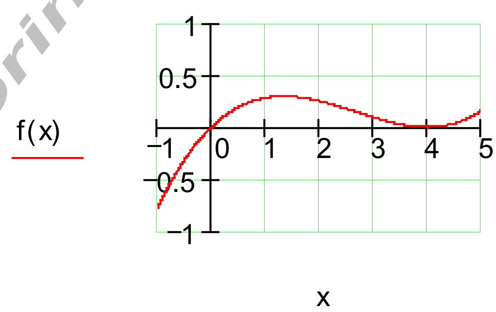
$\Rightarrow$ keine Symmetrie

$x_1=0;\ x_{2/3}=4$

$P_{x1}(0\,|\,0)$

$P_{x2/3}(4\,|\,0)$ Berührungspunkt

Verlauf: III – I



A2h	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich D = IR. Untersuchen Sie f(x) auf Symmetrie, berechnen Sie die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen.	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

A2 Ausführliche Lösung

h)

$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie

1. Nullstelle durch probieren:

$f(3)=-\frac{27}{4}+\frac{81}{4}-18+\frac{9}{2}=0$

$\Rightarrow x_1=3$

Polynomdivision:

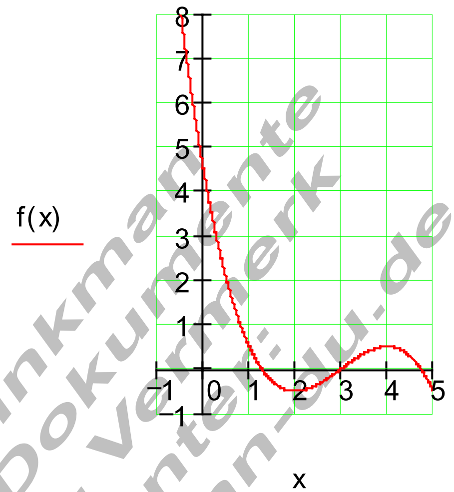
$\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}\right):(x-3)$

$=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow f(x)=(x-3)\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

$=-\frac{1}{4}(x-3)\left(x^2-6x+6\right)$

$x^2-6x+6=0$



$\Rightarrow p=-6\,;\,q=6\Rightarrow D=3$

$\Rightarrow x_2=3+\sqrt{3}\,;\,x_3=3-\sqrt{3}$

$\Rightarrow P_{x1}(3\,|\,0)$

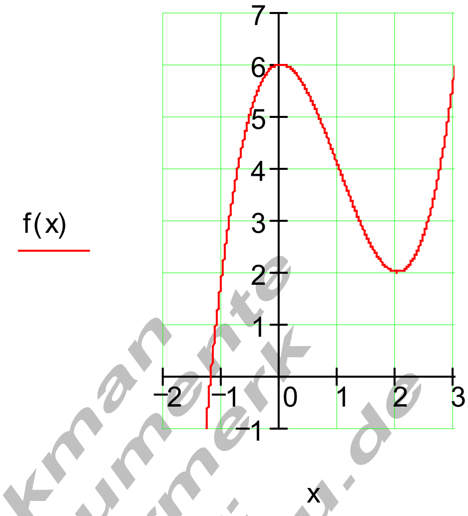
$P_{x2}\left(3+\sqrt{3}\,|\,0\right);P_{x3}\left(3-\sqrt{3}\,|\,0\right)$

Verlauf: II – I – IV – I – IV

A3 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6\,;\, D = \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie:
Die Nullstelle von $f(x)$ liegt zwischen -2 und -1
Begründen Sie, dass f(x) nur eine Nullstelle hat.
Wie muss der Graph verschoben werden, damit er genau zwei Nullstellen hat?



b) Die Gerade x = u schneidet den Graphen von f(x) im Punkt Q und die x – Achse in P.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks 0PQ für u = 2.
Geben Sie einen Term für den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von u für u > 0 an.

c) Wie viele Nullstellen hat g(x) mit $g(x) = 3 \cdot f(x)$?
Begründen Sie.

A3 Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$

$f(-2) = -8 - 12 + 6 = -14$

$f(-1) = -1 - 3 + 6 = 2$

Der Vorzeichenwechsel bei den Funktionswerten bedeutet, dass im Intervall (-2 ; -1) eine Nullstelle liegen muss.
Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle. Da der Tiefpunkt des Graphen von f(x) oberhalb der x – Achse liegt, kann er nur eine Nullstelle haben.
Soll der Graph g(x) genau zwei Nullstellen haben, so muss der Graph von f(x) um 2 LE oder um 6 LE nach unten verschoben werden.
Es existieren also 2 Möglichkeiten:

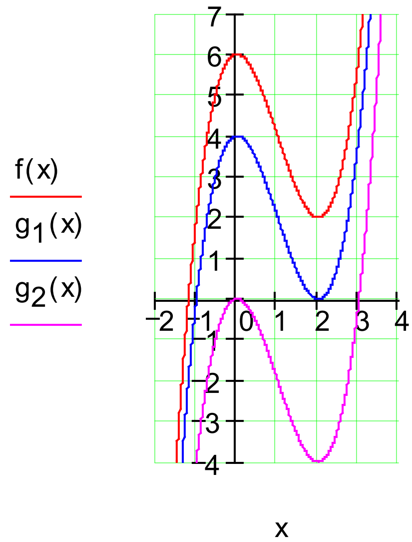
1. $g_1(x) = f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 4$

2. $g_2(x) = f(x) - 6 = x^3 - 3x^2$

$f(x) := x^3 - 3x^2 + 6$

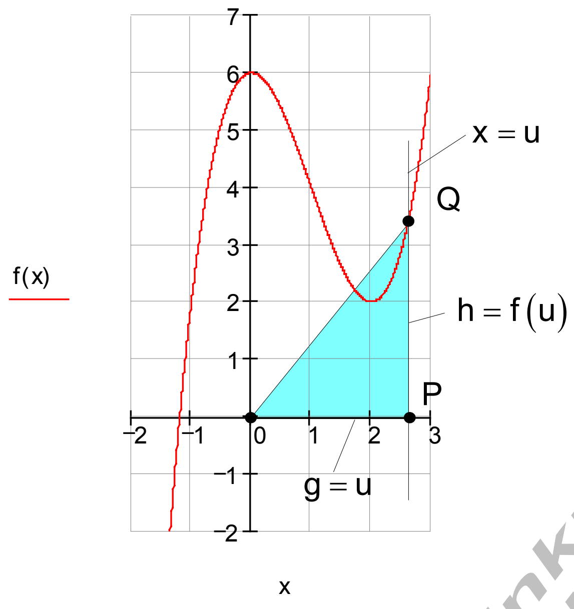
$g_1(x) := x^3 - 3x^2 + 4$

$g_2(x) := x^3 - 3x^2$



A3 Ausführliche Lösung

b)



Dreiecksfläche: $A = \frac{g \cdot h}{2}$

In Abhängigkeit von u

mit $g = u$ und $h = f(u)$ gilt:

$A(u) = \frac{u \cdot f(u)}{2}$

Für $u = 2$ ist $f(u) = f(2) = 2$

$\Rightarrow A = \frac{2 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{2\,FE}}$

Allgemein für $u > 0$ gilt:

$$A(u) = \frac{1}{2} u \cdot f(u) = \frac{1}{2} u\left(u^3 - 3u^2 + 6\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}u^4 - \frac{3}{2}u^3 + 3u}}$$

A3 Ausführliche Lösung

c) Die Funktion g(x) = 3f(x) hat die gleichen Nullstellen wie f(x).

Begründung:

$f(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{3 \cdot f(x)}_{g(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

A4 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f(x). Zeigen Sie: x = 0,4 ist eine Nullstelle.
Berechnen Sie weitere Nullstellen.

$f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4\,;\, D = \mathbb{R}$

A4 Ausführliche Lösung

$f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4$ Behauptung: $x = 0,4$ ergibt eine Nullstelle, also $f(0,4) = 0$

Beweis: $f(0,4) = 5 \cdot 0,4^3 - 10,8 \cdot 0,4 + 4 = 0,32 - 4,32 + 4 = 0$

Polynomdivision:

$$\left(5x^3 - 10,8x + 4\right) : \left(x - 0,4\right) = 5x^2 + 2x - 10$$

$$\begin{array}{l}
-\left(5x^3 - 2x^2\right) \\
\hline
\quad 2x^2 - 10,8x \\
\quad -\left(2x^2 - 0,8x\right) \\
\hline
\qquad -10x + 4 \\
\qquad -\left(-10x + 4\right) \\
\hline
\end{array}$$

$\Rightarrow 5x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0,4x - 2 = 0$

$p = 0,4\,;\, q = -2 \Rightarrow D = 2,04$

$\Rightarrow x_2 = -0,2 + \sqrt{2,04} \approx \underline{\underline{1,23}}$

$\Rightarrow x_3 = -0,2 - \sqrt{2,04} \approx \underline{\underline{-1,63}}$

A5 **Aufgabe**

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von der Variablen c.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\ ;\ D = \mathbb{R}$

A5 **Ausführliche Lösung**

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx = x\left(x^2 + 2x + 2c\right)$

Es können maximal 3 Nullstellen auftreten.
P(0 | 0) ist unabhängig von c immer Nullstelle.
Zu untersuchen ist also der Klammerausdruck.

$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\ ;\ q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$

für $D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0,5$

für $D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0,5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$

für $D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0,5$

für $c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(x + 2\right) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\ ;\ x_3 = -2$

Zusammenfassung:
Für c > 0,5 hat f(x) genau eine Nullstelle: P_x(0 | 0).
Für c = 0,5 oder c = 0 hat f(x) genau zwei Nullstellen
Für c < 0,5 und c ungleich Null hat f(x) genau drei Nullstellen.