Lösungen Geraden und Parabeln zur Vorbereitung der Klassenarbeit I

Ergebnisse ohne Graphen:

E1	Ergebnis
	Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$

E2	Ergebnis
	Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{10}$

E3	Ergebnis
	$f(x) = x + 2;\ g(x) = -x + 4 \Rightarrow S(1\,|\,3)$

E4	Ergebnisse			
	a)	$f(x) = (x+1)^2 + 4;\ S(-1\,|\,4)$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 9;\ S(1\,|\,-9)$

E5	Ergebnisse			
	a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. $S(-2\,|\,-9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. $S(4\,|\,-3)$
	c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. $S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt $S\left(-\frac{3}{4}\,\middle|\,-\frac{1}{3}\right)$

E6	Ergebnis
	$f(x) = -\frac{2}{5}(x-4)^2 - 3$ Die Parabel ist nach unten geöffnet.

E7	Ergebnisse			
	a)	$P_{x1}(-5\,|\,0);\ P_{x2}(1\,|\,0);\ P_y(0\,|\,-5)$	b)	$P_{x1}\left(-2+\sqrt{5} \approx 0,24\,|\,0\right)$ $P_{x2}\left(-2-\sqrt{5} \approx -4,24\,|\,0\right);\ P_y(0\,|\,1)$
	c)	$P_{x1}(-2\,|\,0);\ P_{x2}(3\,|\,0);\ P_y(0\,|\,6)$	d)	$P_{x1}(-6\,|\,0);\ P_{x2}(2\,|\,0);\ P_y(0\,|\,6)$

E8	Ergebnisse			
	a)	$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4};\ S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{25}{4}\right)$	b)	$f(x) = (x+3)^2 - 5;\ S(-3\,|\,-5)$

E9	Ergebnis
	$f(x)=x^2+5x+2{,}25\,;\,g(x)=-1{,}5x-5{,}25 \Rightarrow P_1\left(-\frac{3}{2}\middle\vert-3\right);P_2\left(-5\middle\vert\frac{9}{4}\right)$

E10	Ergebnis
	$f(x)=x^2-4x+1;\,g(x)=-x^2+2x+1 \Rightarrow P_1(0\,\vert\,1)\,;P_2(3\,\vert\,-2)$

E11	Ergebnis
	$f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2-3\,;\,g(x)=\frac{2}{3}(x+3)^2-6 \Rightarrow h(x)=\frac{3}{7}x-\frac{33}{7}$

E12	Ergebnis
	$f(x)=(x+2)^2-2\,;\,g(x)=-(x+2)^2+5$ Die Scheitelpunkte beider Parabeln haben einen Abstand von 7 Einheiten.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Eine Gerade mit der Steigung a = -4/5 verläuft durch den Punkt P_1 (3 | -2). Ermitteln Sie die Funktionsgleichung f (x) und zeichnen Sie die Gerade in ein Koordinatensystem.

A1 Ausführliche Lösung

Ansatz:

$$f(x) = a_1x + a_0 \text{ mit } a_1 = -\frac{4}{5} \text{ wird}$$

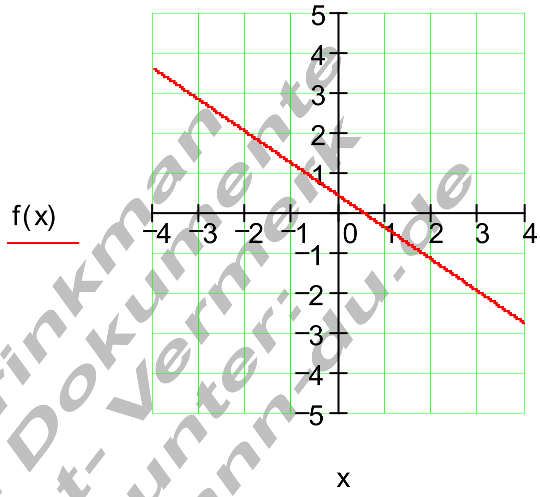
$$f(x) = -\frac{4}{5}x + a_0$$

Punktprobe mit $P_1(3\,|\,-2)$ ergibt:

$$f(3) = -2 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}\cdot 3 + a_0 = -2 \;|+\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow a_0 = \frac{2}{5}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}}}$$



A2 Aufgabe

Gegeben sind die Punkte P_1 und P_2 die auf einer Geraden liegen. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung f (x) und zeichnen Sie den Graphen.

$P_1(-4\,|\,1{,}5)\,;P_2(3{,}5\,|\,-3)$

A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=a_1x+a_0$

$P_1\left(-4\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);P_2\left(\frac{7}{2}\,\middle|\,-3\right)$

$a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}-(-4)}=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+a_0$

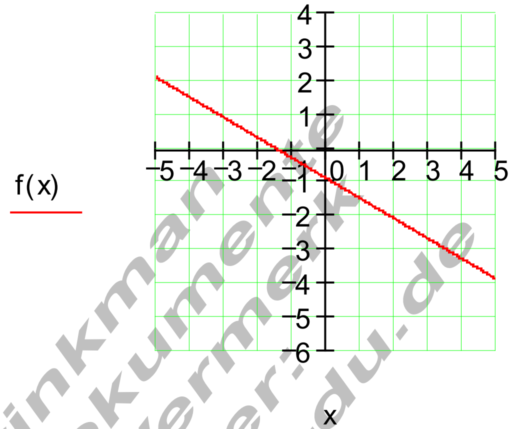
Punktprobe mit $P_1\left(-4\,\middle|\,\frac{3}{2}\right)$ ergibt:

$f(-4)=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\cdot(-4)+a_0=\frac{3}{2}\,\Big|-\frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow a_0=-\frac{9}{10}$

$\underline{\underline{f(x)=-\frac{3}{5}x-\frac{9}{10}}}$



A3 Aufgabe

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen

$f(x)=x+2$ und $g(x)=-x+4$

Zeichnen Sie beide Geraden in ein Koordinatensystem.

A3 Ausführliche Lösung

$P(x_s\,|\,y_s)$ sei der Schnittpunkt beider Geraden.

Ansatz: Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen.

$f(x_s)=g(x_s)$

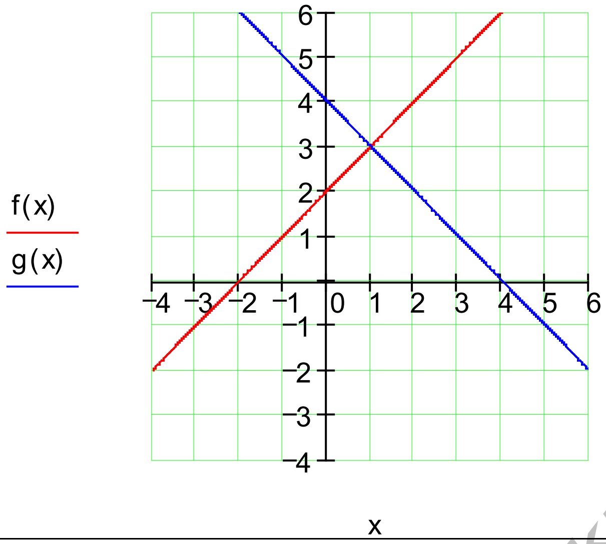
$\Leftrightarrow x_s+2=-x_s+4\,|+x_s$

$\Leftrightarrow 2x_s+2=4\,|-2$

$\Leftrightarrow 2x_s=2\,|:2$

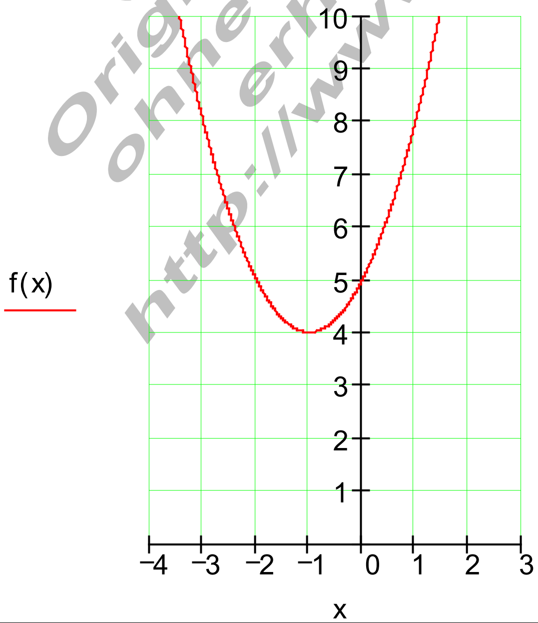
$\Leftrightarrow x_s=1$ ist die x – Koordinate des Schnittpunktes.

$y_s=f(x_s)=f(1)=1+2=3\Rightarrow \underline{\underline{P(1|3)}}$ ist der Geradenschnittpunkt

A3	**Ausführliche Lösung**
	

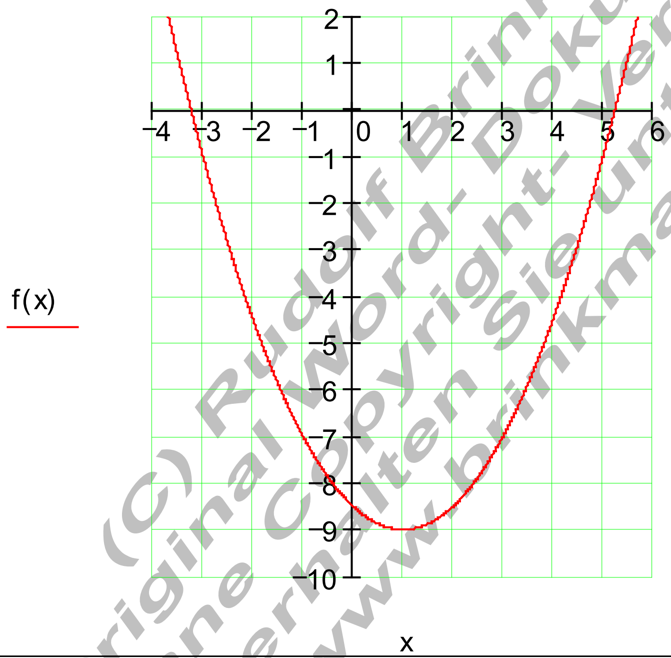
A4	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie die Parabeln.	
	a)	$f(x) = x^2 + 2x + 5$

A4	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(x) = x^2 + 2x + 5$ Lösung durch quadratische Ergänzung.
		$f(x) = \underbrace{x^2 + 2x + 1^2}_{\text{1. bin. Formel}} \underbrace{-1^2 + 5}_{4}$
		$f(x) = (x+1)^2 + 4$ ist die Scheitelpunktform, $S(-1\|4)$ ist der Scheitelpunkt.

A4	**Ausführliche Lösung**
	a) 

A4	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie die Parabeln.	
	b)	$f(x) = 0{,}5x^2 - x - 8{,}5$

A4	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{17}{2}$ den Faktor $\frac{1}{2}$ ausklammern. $f(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 - 2x - 17\right] \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2 - 2x + 1^2}_{\text{2. bin. Formel}} \underbrace{-1^2 - 17}_{-18}\right]$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 18\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 9 \Rightarrow S(1 \mid -9)$

A4	**Ausführliche Lösung**	
	b)	

A5	**Aufgabe**			
	Beschreiben Sie schrittweise, wie f(x) aus der Normalparabel entsteht und wie sie geöffnet ist. Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt?			
	a)	$f(x) = (x+2)^2 - 9$	b)	$f(x) = 0{,}5(x-4)^2 - 3$
	c)	$f(x) = -\frac{7}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$	d)	$f(x) = -4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}$

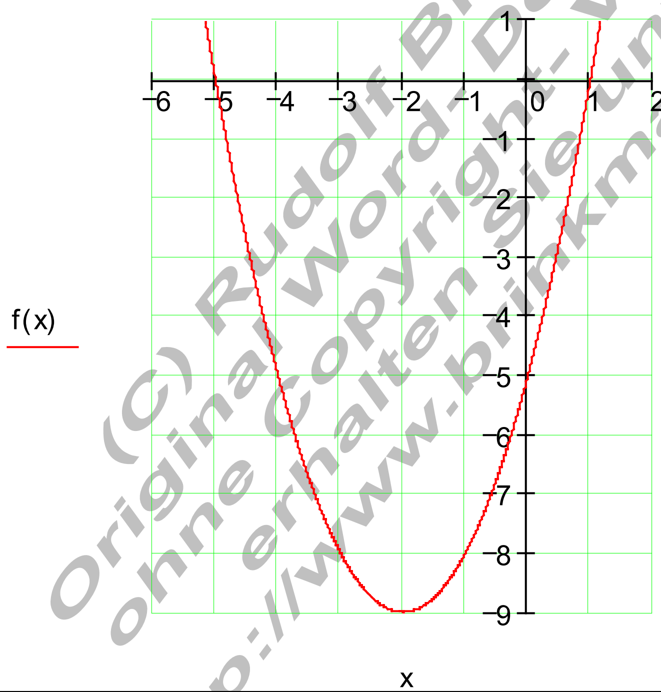
A5	**Ausführliche Lösung**			
	a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(-2 \mid -9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(4 \mid -3)$
	c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(-\frac{3}{4} \middle| -\frac{1}{3}\right)$

A6	**Aufgabe**
	Eine Normalparabel wird mit dem Formfaktor –0,4 gestaucht und um 4 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach unten verschoben. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung. Wie ist die Parabel geöffnet?

A6	**Ausführliche Lösung**
	$f(x) = \underbrace{-\frac{2}{5}}_{\text{Formfaktor}}\Big(x \underbrace{-4}_{\text{4 EH nach rechts}}\Big)^2 \underbrace{-3}_{\text{3 EH nach unten}}$
	Die Parabel ist nach unten geöffnet, da der Formfaktor negativ ist.

A7	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie folgende Parabeln.	
	a)	$f(x) = (x+2)^2 - 9$

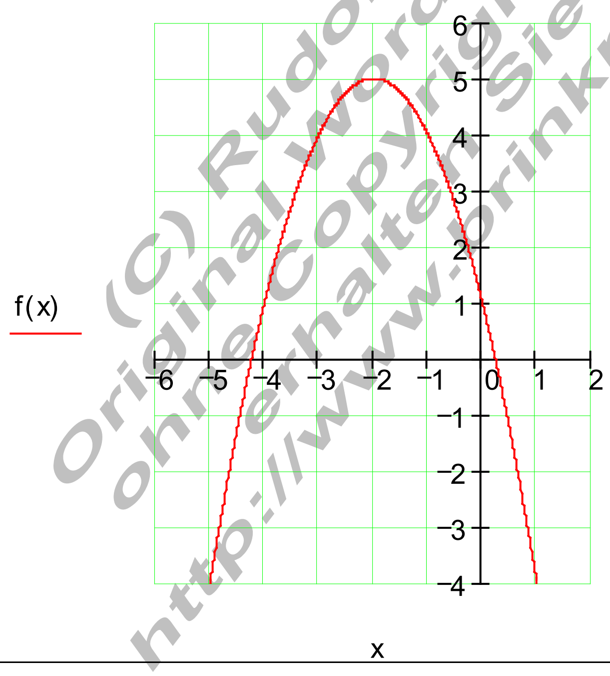
A7	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Berechnung: $f(x) = (x+2)^2 - 9$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)^2 - 9 = 0 \mid +9 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \lvert x+2 \rvert = 3$ 1. $x+2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$ 2. $x+2 = -3 \Rightarrow x_2 = -5$ Ansatz für $P_y: y_s = f(0) = (0+2)^2 - 9 = -5$ Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(1 \mid 0); P_{x2}(-5 \mid 0); P_y(0 \mid -5)$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Der Graph: 

A7	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie folgende Parabeln.	
	b)	$f(x) = -(x+2)^2 + 5$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Berechnung:
		$f(x) = -(x+2)^2 + 5$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$
		$\Leftrightarrow -(x+2)^2 + 9 = 0 \mid -5 \Leftrightarrow -(x+2)^2 = -5 \mid \cdot(-1)$
		$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 5 \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \lvert x+2 \rvert = \sqrt{5}$
		1. $x+2 = \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -2+\sqrt{5} \approx 0{,}24$
		2. $x+2 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_2 = -2-\sqrt{5} \approx -4{,}24$
		Ansatz für P_y : $y_s = f(0) = -(0+2)^2 + 5 = 1$
		Achsenschnittpunkte:
		$P_{x1}\left(-2+\sqrt{5} \approx 0{,}24 \mid 0\right); P_{x2}\left(-2-\sqrt{5} \approx -4{,}24 \mid 0\right); P_y(0 \mid 1)$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Der Graph:



A7	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie folgende Parabeln.	
	c)	$f(x) = -x^2 + x + 6$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Berechnung:

$f(x) = -x^2 + x + 6$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \,|\cdot(-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}} \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6}_{-\frac{25}{4}} = 0$$

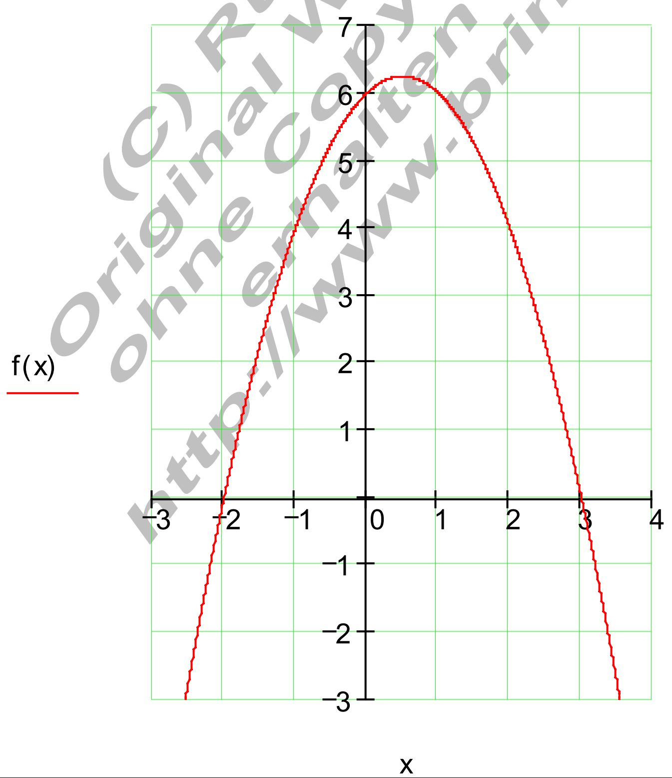
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \,|+\frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \,|\sqrt{\ } \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

1. $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 3$
2. $x - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = -2$

Ansatz für P_y : $y_s = f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6$

Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(3\,|\,0)\,;P_{x2}(-2\,|\,0)\,;P_y(0\,|\,6)$

A7	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Der Graph:



A7	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und zeichnen Sie folgende Parabeln.	
	d)	$f(x) = -0{,}5x^2 - 2x + 6$

A7 Ausführliche Lösung

d) Berechnung:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \mid : \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + (2)^2}_{\text{1. bin. Formel}} \underbrace{-(2)^2 - 12}_{-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0 \mid +16 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow |x+2| = 4$$

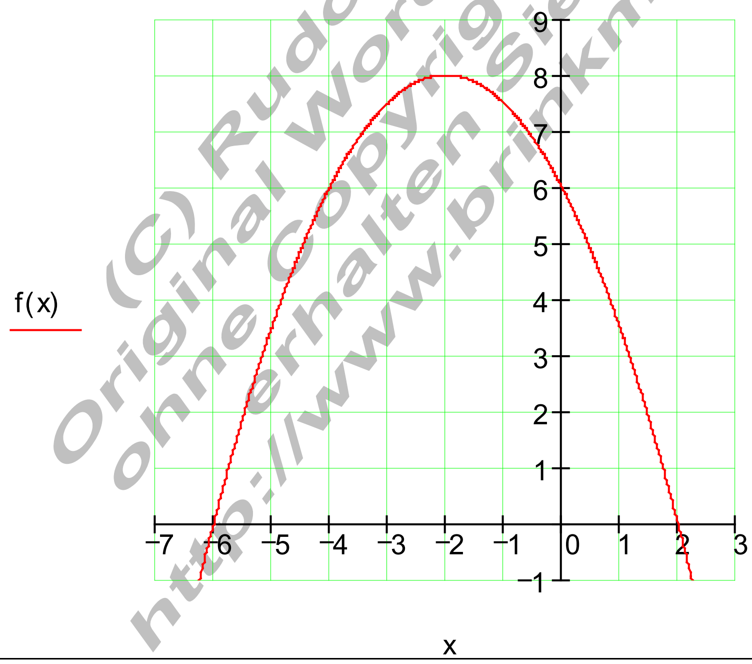
1. $x + 2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$
2. $x + 2 = -4 \Rightarrow x_2 = -6$

Ansatz für P_y : $y_s = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6$

Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(2 \mid 0)$; $P_{x2}(-6 \mid 0)$; $P_y(0 \mid 6)$

A7 Ausführliche Lösung

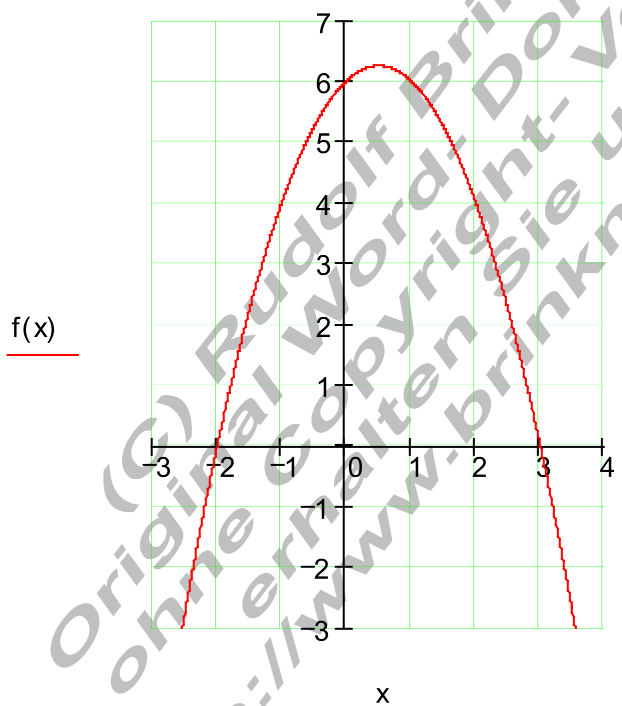
d) Der Graph:



A8	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie die Parabeln.	
	a)	$f(x) = -x^2 + x + 6$ Nullstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

A8	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Berechnung:
		$f(x) = -x^2 + x + 6$ Scheitelpunkt über Nullstellen.
		$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y_s = f(x_s) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$
		$S\left(\frac{1}{2} = 0{,}5 \middle| \frac{25}{4} = 6{,}25\right)$ $\quad f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$

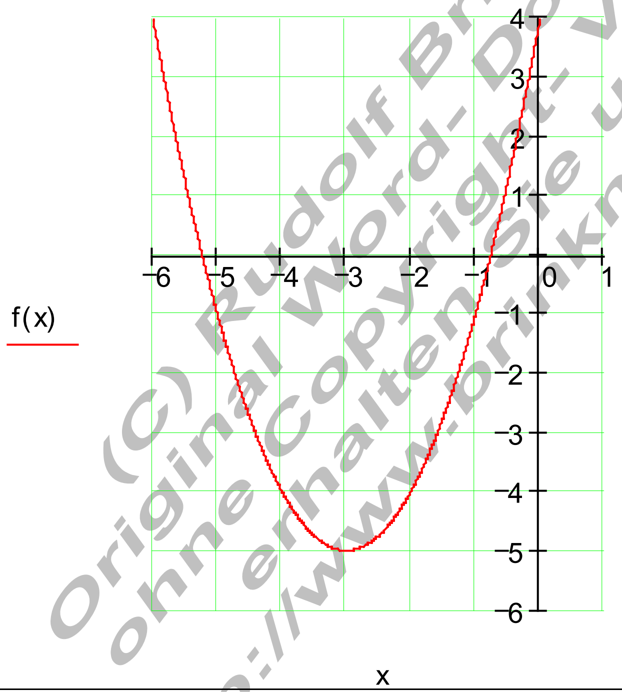
A8	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Der Graph:



A8	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt. Zeichnen Sie die Parabeln.	
	b)	$f(x)=x^2+6x+4$ Nullstellen bei $x_1=-3+\sqrt{5}$ und $x_2=-3-\sqrt{5}$

A8	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Berechnung: $f(x)=x^2+6x+4$ Scheitelpunkt über Nullstellen. $x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-3+\sqrt{5}+\left(-3-\sqrt{5}\right)}{2}=-3$ $y_s=f(x_s)=f(-3)=(-3)^2+6\cdot(-3)+4=-5$ $S(-3\mid-5)$ $\quad$ $f(x)=(x+3)^2-5$

A8	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Der Graph:



A9	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Schnittpunkte von Parabel und Gerade.
	$f(x) = x^2 + 5x + 2{,}25 \qquad g(x) = -1{,}5x - 5{,}25$

A9	**Ausführliche Lösung**

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4} \qquad g(x) = -\frac{3}{2}x - 5\frac{1}{4}$$

Ansatz:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}x - 5\frac{1}{4} \;\Big|\; + \frac{3}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{9}{4} = -\frac{21}{4} \;\Big|\; + \frac{21}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \text{ Lösung durch quadratische Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \;\Big|\; + \frac{49}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{13}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \;\Big|\; \sqrt{} \Leftrightarrow \left|x + \frac{13}{4}\right| = \frac{7}{4}$$

Fall 1: $x + \frac{13}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$ Fall 2: $x + \frac{13}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x_2 = -5$

x_1 und x_2 sind die x – Koordinaten der Schnittpunkte.
Die y – Koordinaten der Schnittpunkte finden wir durch einsetzen in $f(x)$ oder in $g(x)$.

$$y_1 = g(x_1) = g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{21}{4} = -3$$

$$y_2 = g(x_2) = g(-5) = -\frac{3}{2} \cdot (-5) - \frac{21}{4} = \frac{9}{4}$$

Die Gerade schneidet die Parabel in den Punkten $P_1\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -3\right)$ und $P_2\left(-5 \,\middle|\, \frac{9}{4}\right)$

A10 Aufgabe

Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln, von denen die Schnittpunkte zu bestimmen sind. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

A10 Ausführliche Lösung

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

Ansatz : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \mid +x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 2x + 1 \mid -2x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 1 \mid -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \mid :2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ q. E.

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \color{red}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

Fall I: $x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ Fall II: $x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 0$

$y_1 = f(x_1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$

$y_2 = f(x_2) = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$

Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P_1(3 \mid -2)$ und $P_2(0 \mid 1)$

A11 Aufgabe

Berechnen Sie die Funktionsgleichung h(x) der Verbindungsgeraden der Scheitelpunkte folgender Parabeln:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3$ und $g(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 6$

A11 Ausführliche Lösung

$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3 \Rightarrow S_1(4 \mid -3)$

$g(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 6 \Rightarrow S_2(-3 \mid -6)$

Die Gerade verläuft durch die beiden Scheitelpunkte.

Ansatz: $f_g(x) = a_1x + a_0$

$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6-(-3)}{-3-4} = \frac{3}{7}$

$f_g(x) = \frac{3}{7}x + a_0$ Punktprpbe mit $S_1(4 \mid -3)$:

$f_g(4) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{7} \cdot 4 + a_0 = -3 \mid -\frac{3}{7}$

$\Leftrightarrow a_0 = -\frac{33}{7} \Rightarrow \color{red}{f_g(x) = \frac{3}{7}x - \frac{33}{7}}$

A12	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie den Abstand der Scheitelpunkte beider Parabeln voneinander. $f(x) = (x+2)^2 - 2$ und $g(x) = -(x+2)^2 + 5$

A12	**Ausführliche Lösung**
	Da beide Scheitelpunkte die x – Koordinate x = -2 haben, liegen sie übereinander. Der Abstand berechnet sich aus dem Betrag der Differenz der y - Koordinaten. Er beträgt 7 EH. $\text{Abstand} = \lvert 5-(-2) \rvert = \lvert 5+2 \rvert = 7$