Beispiel I Training quadratische Funktionen III

Ausführliches Beispiel zur Nullstellenbestimmung durch quadratische Ergänzung:

Funktionsgleichung der Parabel in allgemeiner Form:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

Bedingung für Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$$

Die quadratische Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$

soll nun mit der Methode der quadratischen Ergänzung gelöst werden.

$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \,|:\left(-\frac{1}{2}\right)$ auf die Normalform bringen

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ Normalform der quadratischen Gleichung

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 12 = 0$ quadratische Ergänzung

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{1. binomische Formel}} \underbrace{-4 - 12}_{-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0 \,|+16$$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \,|\sqrt{}$ Wurzel ziehen (radizieren)

$$\Leftrightarrow |x+2| = \sqrt{16} = 4$$

Betrag auflösen!

Fall 1: $x + 2 = 4 \,|-2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x_1 = 2$

Fall 2: $x + 2 = -4 \,|-2 \Leftrightarrow x = -6 \Rightarrow x_2 = -6$

Die Nullstellen: $\boxed{x_1 = 2}$ bzw. $\boxed{x_2 = -6}$

Schnittpunkte mit der $x-$Achse: $\boxed{P_{x1}(2\,|\,0)}$ bzw. $\boxed{P_{x2}(-6\,|\,0)}$

Bedingung für den Schnittpunkte mit der $y-$Achse:

$$y_s = f(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow \boxed{P_y(0\,|\,6)}$$

Die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion wird Null gesetzt. Die daraus entstehende quadratische Gleichung wird auf die Normalform gebracht. Diese wird durch quadratische Ergänzung gelöst, indem man den quadratischen Teilterm von der Konstanten trennt und daraus die Wurzel zieht. Auflösung der Betragsgleichung liefert die Nullstellen.