Lösungen quadratische Funktionen vermischt I

Ergebnisse und ausführliche Lösungen:

A1 Aufgabe

Stellen Sie die Funktionsgleichungen auf und bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f(x) und g(x).

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	1	4	9
$g(x)$	-7	-2	1	2	1

b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$1{,}5$	2	$1{,}5$	0	$-2{,}5$
$g(x)$	6	2	0	0	2

A1 Ausführliche Lösung

a) Allgemeine Funktionsgleichung für eine Parabel: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
Die Koordinaten von jeweils 3 Punkten genügen um die Koeffizienten der Funktionsgleichungen zu bestimmen.

Auswahl für f(x)

$P_1(0\,|\,1);P_2(1\,|\,4);P_3(2\,|\,9)$

Ansatz:

$f(0) = a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$

$f(1) = a_2\cdot 1 + a_1\cdot 1 + 1 = 4$

$f(2) = a_2\cdot 4 + a_1\cdot 2 + 1 = 9$

Auswahl für g(x)

$P_1(0\,|\,1);P_2(1\,|\,2);P_3(2\,|\,1)$

Ansatz:

$g(0) = a_2\cdot 0^2 + a_1\cdot 0 + a_0 = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$

$g(1) = a_2\cdot 1 + a_1\cdot 1 + 1 = 2$

$g(2) = a_2\cdot 4 + a_1\cdot 2 + 1 = 1$

Das sind jeweils zwei Gleichungen mit zwei Variablen.
Lösung durch eins der drei bekannten Verfahren
(Additions, Einsetzungs oder Gleichsetzungsverfahren).

$a_2 = 1; a_1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x^2 + 2x + 1}}$

$a_2 = -1; a_1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x^2 + 2x + 1}}$

Schnittpunkte:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \Rightarrow$ Berührungspunkt $\underline{\underline{B(0\,|\,1)}}$

A1 Ausführliche Lösung

b) Bestimmung der Funktionsgleichungen wie unter a)

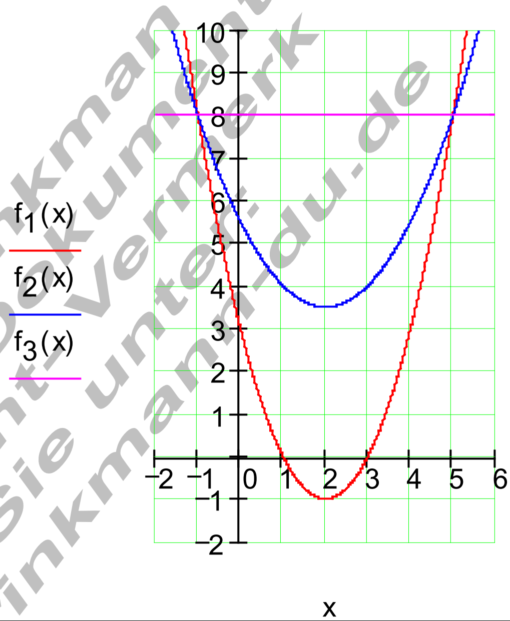
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2\,;\, g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{S_1(0\,|\,2)}}$$

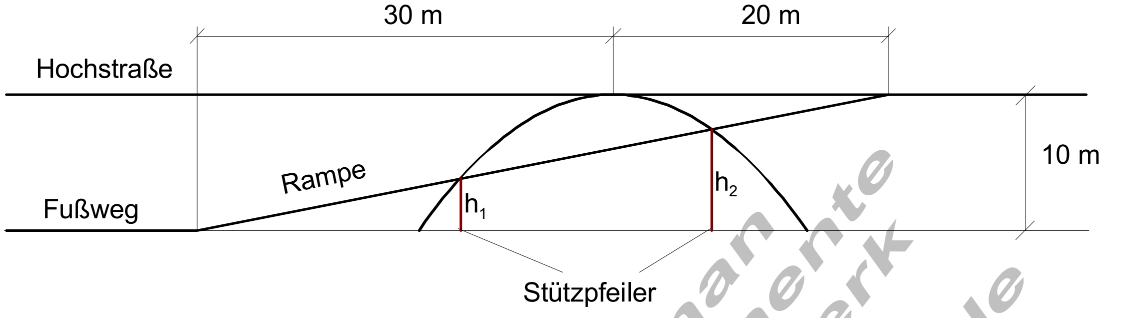
$$\left(-\frac{3}{2}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2 \Rightarrow g(2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S_2(2\,|\,0)}}$$

E2	**Aufgabe**	
	Zwei Parabeln mit den Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2. Berechnen Sie:	$f_1(x) = (x-2)^2 - 1$ $f_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{7}{2}$
	a)	Die Schnittpunkte P_1 und P_2.
	b)	Die Funktionsgleichung der Schnittgeraden $[P_1P_2]$ mit $y = f_3(x)$.
	c)	Die Scheitelpunkte S_1 und S_2.
	d)	Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

E2	**Ergebnisse**			
	a)	Die Schnittpunkte P_1 und P_2: $P_1(-1\|8) \quad P_2(5\|8)$	d)	
	b)	Die Funktionsgleichung der Schnittgeraden $[P_1P_2]$ mit $f_3(x)$: $f_3(x) = 8$		
	c)	die Scheitelpunkte S_1 und S_2: $S_1(2\|-1) \quad S_2\left(2 \,\middle\|\, \frac{7}{2}\right)$		

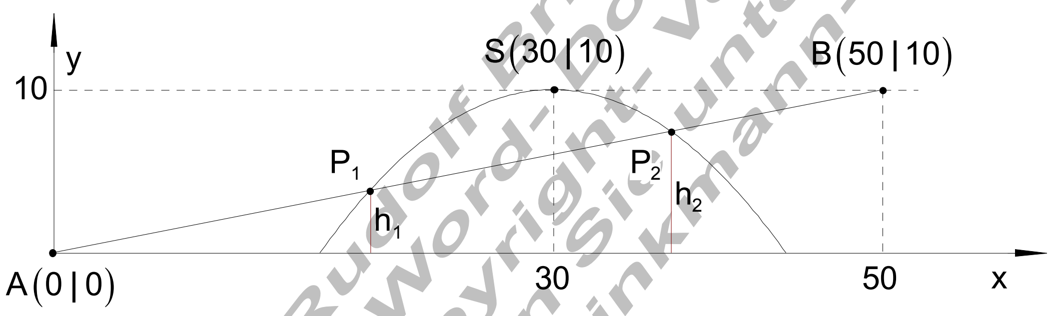
A3 **Aufgabe**

Ein Fußweg verläuft unterhalb einer Hochstraße parallel zu ihr.
Am Fuß einer Brücke mit parabelförmigen Bogen soll ein Fußweg in Form einer Rampe errichtet werden, die zur Straße hinaufführt.
Ermitteln Sie die Höhe der Stützpfeiler für die Rampe.
Von der Parabel ist lediglich bekannt, dass sie den Formfaktor1/20 besitzt.



A3 **Ausführliche Lösung**

Modellierung:



A3 **Ausführliche Lösung**

Aufstellen der Funktionsgleichungen

Rampe (Gerade) durch den Ursprung und $B(50|10)$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = \frac{1}{5}x}}$$

Brückenbogen (Parabel) mit dem Scheitel $S(30|10)$ und $a_2 = -\frac{1}{20}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{20}(x-30)^2 + 10 \text{ Scheitelpunktform}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35}} \text{ allgemeine Form}$$

Um die Höhe der Stützpfeiler zu erhalten benötigen wir die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel.

A3 **Ausführliche Lösung**

Berechnung der Schnittpunkte

Ansatz: $f(x) = g(x)$ oder $f(x) - g(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35 - \frac{1}{5}x = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0 \text{ quadratische Gleichung}$$

$$-\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0 \mid \cdot(-20)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 56x + 700 = 0 \Rightarrow p = -56\,;\, q = 700$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-28)^2 - 700 = 84$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$\Rightarrow x_1 = 28 + \sqrt{84} \quad \vee \quad x_2 = 28 - \sqrt{84}$$

Die Höhe der Pfeiler entspricht den zugehörigen y – Werten.

$$y_1 = g(x_1) = g\left(28 + \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 + \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{7,433}}$$

$$y_2 = g(x_2) = g\left(28 - \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 - \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{3,767}}$$

Der Pfeiler h_1 hat die Höhe 3,764 m, der Pfeiler h_2 hat die Höhe 7,433 m.

Soll der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Parabel bestimmt werden, so führt das immer auf eine quadratische Gleichung.

A4	**Aufgabe**
	<u>Amortisationsrechnung</u> Ein Billigkühlschrank kostet 250 €, er verursacht monatlich 10 € Energiekosten. Der Ökokühlschrank kostet hingegen 500 € und verursacht monatlich nur 4 € Energiekosten. Nach wie viel Monaten hat sich der Ökokühlschrank bezahlt gemacht? Hinweis: Beide Kostenkurven stellen Geraden dar, deren Schnittpunkt zu bestimmen ist.

A4 **Ausführliche Lösung**

Hinweis:
Beide Kostenkurven stellen Geraden dar, deren Schnittpunkt zu bestimmen ist.

Aus den gegebenen Daten sind zuerst die Steigungen beider Geraden zu bestimmen.

$m_1 : 10\,€ / \text{Monat} \Rightarrow m_1 = 10/1 = 10$

$m_2 : 4\,€ / \text{Monat} \Rightarrow m_1 = 4/1 = 4$

f_1 schneidet die y – Achse bei $250 \Rightarrow b = 250$

f_2 schneidet die y – Achse bei $500 \Rightarrow b = 500$

Billigkühlschrank: $m = \frac{10}{1} \quad b = 250$

$\Rightarrow f_1(x) = 10x + 250$

Ökokühlschrank: $m = \frac{4}{1} \quad b = 500$

$\Rightarrow f_2(x) = 4x + 500$

$f_1(x_s) = f_2(x_s)$

$\Rightarrow 10x_s + 250 = 4x_s + 500$

$\Leftrightarrow 6x_s = 250$

$\Leftrightarrow x_s = \frac{250}{6} = 41\frac{2}{3}$

$y_s = f_1(x_s) = 10 \cdot \frac{250}{6} + 250 = 666\frac{2}{3}$

$\underline{\underline{P_s\left(41\frac{2}{3} \,\middle|\, 666\frac{2}{3}\right)}}$

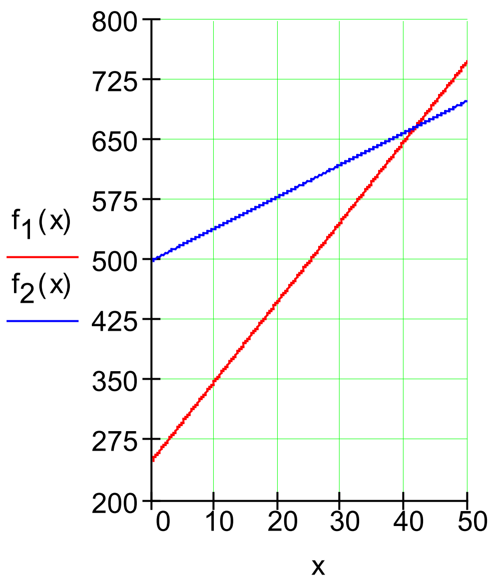
A4 **Ausführliche Lösung**

Von den so erhaltenen Geraden ist der Schnittpunkt zu bestimmen.
Dort herrscht Kostengleichheit.

Ab diesem Zeitpunkt, sind die Kosten für
den Billigkühlschrank größer.

Ergebnis:
Nach 41 2/3 Monaten
= 41 Monate 20 Tage
= 3 Jahre 5 Monate 20 Tage hat sich der Ökokühlschrank amortisiert.

Die bis dahin entstandenen Gesamtkosten
betragen 666,67 €



A5	**Aufgabe**
	Gewinnfunktion Der Gewinn ist bei den Absatzmengen 2 ME und 10 ME gleich Null. Bei einer Absatzmenge von 4 ME ist er 6 GE. - Bestimmen Sie die Gewinnfunktion - Bestimmen Sie bei welcher Absatzmenge sich der größte Gewinn ergibt. Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Gewinnfunktion (Parabel durch drei Punkte) Der größte Gewinn entsteht am Scheitelpunkt dieser Parabel.

A5 Ausführliche Lösung

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Gewinnfunktion (Parabel durch drei Punkte)
Der größte Gewinn entsteht am Scheitelpunkt dieser Parabel.

$$G(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_1(2\,|\,0): \quad 4a + 2b + c = 0$$

$$P_2(10\,|\,0): \quad 100a + 10b + c = 0$$

$$P_3(4\,|\,6): \quad 16a + 4b + c = 6$$

4	2	1	0	
100	10	1	0	$II - 25 \cdot I$
16	4	1	6	$III - 4 \cdot /$
4	2	1	0	
0	−40	−24	0	
0	−4	−3	6	$\cdot(-10)$
4	2	1	0	
0	−40	−24	0	$:(-8)$
0	40	30	−60	$III + II$
4	2	1	0	
0	5	3	0	
0	0	6	−60	

$$6c = -60$$

$$\Leftrightarrow c = -10$$

$$5b + 3 \cdot (-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

$$4a + 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 10}}$$

A5	**Ausführliche Lösung**
	Nachdem die Gewinnfunktion ermittelt wurde, ist diese in die Scheitelform umzuformen. $G(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-10$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left[x^2-12x+20\right]$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left[x^2-12x+6^2-6^2+20\right]$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left[(x-6)^2-16\right]$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-6)^2+8 \Rightarrow \underline{\underline{S(6\,\vert\,8)}}$ Bei einer Ausbringung von 6 ME ist der Gewinn mit 8 GE maximal.

A5	**Ausführliche Lösung**